۱
گزینهٔ ۴

گزینهٔ "۱": درست است. همهٔ افراد گروه A از B کوتاه‌ترند، پس میانگین آن‌ها نیز کمتر است. $A <$ علی $< B$
گزینهٔ "۲": درست است.
گزینهٔ "۳": درست است. همهٔ افراد گروه B از علی بلندتر هستند، پس میانگین قد آن‌ها نیز بیشتر است.
گزینهٔ "۴": تعداد عضوهای A و B را نمی‌دانیم، پس مشخص نیست علی وسط باشد یا خیر.

۲
گزینهٔ ۴

مطمئناً اینترمیلان تا به حال نباخته است، چون در روزهای فرد مساوی و در روزهای زوج برنده بوده است.

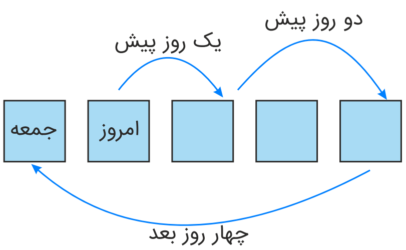
۳
گزینهٔ ۱

آرمین یا دوم است یا سوم.
محمد پشت آرمین است، پس یا سوم است یا چهارم و چون امید از او جلو می‌زند پس محمد سوم بوده که چهارم می‌شود و امید سوم و آرمین نیز دوم، پس رضا اول است.

۴
گزینهٔ ۴

گزینهٔ "۱": اگر هیچ کتابی نداشته باشد، هر سه دروغگو هستند. ×
گزینهٔ "۲": اگر ۵۰ کتاب داشته باشد، مهرداد و امیر راستگو هستند. ×
گزینهٔ "۳": اگر کمتر از ۵۰ کتاب داشته باشد، محمد و مهرداد راستگو هستند. ×
گزینهٔ "۴": اگر بیشتر از ۵۰ کتاب داشته باشد، فقط مهرداد راستگو است. ✓

۵
گزینهٔ ۳



این شکل برای صحبت‌های علی و محمد است که متوجه می‌شویم محمد باید یک روز دیرتر این حرف را می‌زد، پس سه روز بعد جمعه است نه چهار روز بعد، پس جمعه بر روی امروز قرار می‌گیرد.

۶
گزینهٔ ۲

چون همه جواب‌های مختلف داده‌اند، پس فقط یک نفر راست می‌گوید. چون فقط راست‌گویان حقوق گرفته‌اند، پس فقط یک نفر حقوق گرفته است.

۷

گزینه ۳

۱- اگر کلید دست علی باشد، بنا به گفته‌ها فقط علی دروغگو است.
۲- اگر کلید دست رضا باشد، رضا و محمد دروغگو هستند.
۳- اگر کلید دست محمد باشد، هر سه دروغگو هستند.
پس کلید دست محمد است.

۸

گزینه ۳

اگر علی دزد باشد، هر سه نفر دروغگو هستند.
اگر محمد دزد باشد، فقط رضا دروغ گفته است.
و اگر رضا دزد باشد، هر سه دروغگو هستند.
پس محمد دزد است و رضا دروغ گفته است.

۹

گزینه ۴

گزینه ۱ : عدد یک این‌گونه نیست.
گزینه ۲ : $۵ - ۳ = ۲$
گزینه ۳ : $۱۶ = ۴^۲$ که بیشتر از سه شمارنده دارد.

۱۰

گزینه ۳

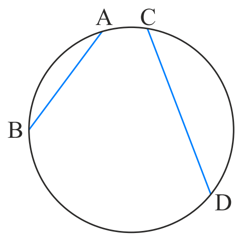
گزینه ۱ : "محمد > علی" و "محمد > رضا"
این اطلاعات نمی‌تواند تعیین کند که بین رضا و علی کدام کوتاه‌ترند.
گزینه ۲ : یکی از سه روز بعد باران می‌بارد، پس نمی‌توانیم مطمئن باشیم دقیقاً سه‌شنبه باران می‌بارد.
گزینه ۴ : سال تولد من و دوستم مشخص نیست، پس نمی‌توان گفت دقیقاً یک روز بزرگ‌ترم.

۱۱

گزینه ۴

گزینه‌های "۱"، "۲" و "۳" را رد می‌کنیم:

۱) در متوازی‌الاضلاع نیز اضلاع مقابل موازی‌اند.
۲) این دو وتر برابر نیستند.



۳) مستطیل زاویه‌های قائم دارد، ولی لوزی نیست.

۱۲

گزینه ۱

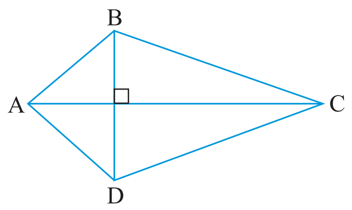
برای حل این سؤال باید تمامی گزینه‌ها را بررسی کنیم. گزینه (۲) در قسمت دوم، یک جملهٔ کاملاً اشتباه گفته است. گزینه (۴) استدلال صحیح است، اما گزینه‌های (۱) و (۳) بسیار شبیه به جملهٔ سؤال هستند. در جملهٔ سؤال در مورد آینده صحبت شده است، حال آنکه در جمله گزینه (۳) در مورد گذشته صحبت شده است، پس گزینه (۱) بسیار به استدلال جملهٔ سؤال نزدیک است.

۱۳ گزینه ۲

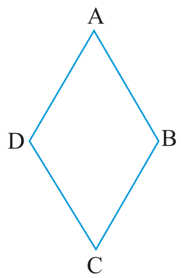
استدلال داده‌شده در گزینهٔ "۲" معتبر است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: در چهارضلعی $ABCD$ دو قطر بر هم عمود هستند ولی لوزی نیست.



گزینهٔ ۳: چهارضلعی $ABCD$ لوزی است و دارای اضلاع برابر است.



گزینهٔ ۴: در مثلث قائم‌الزاویه محل برخورد سه ارتفاع روی رأس قائمه است.

۱۴ گزینه ۴

در گزینهٔ صحیح گفته شده ABCD مربع نیست پس اضلاعش برابر نیست که این نتیجه‌گیری غلط است زیرا در لوزی هم اضلاع A برابرند و ABCD ممکن است لوزی باشد.

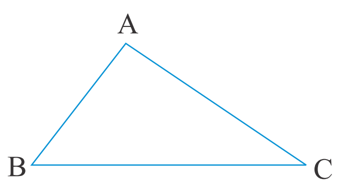
۱۵ گزینه ۳

ازآنجاکه مربع، نوعی مستطیل است، پس استدلال گزینهٔ ۳ صحیح است.

دلیل نادرستی استدلال‌های سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱ : چون مثلث متساوی‌الاضلاع نوع خاصی از مثلث است، نمی‌توان برای هر مثلث چنین نتیجه‌ای گرفت.

گزینهٔ ۲ : مثال نقض:



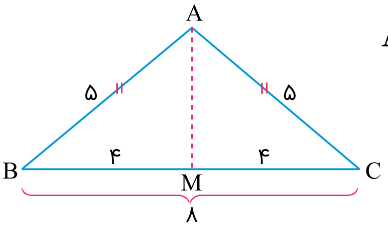
گزینهٔ ۴ : چون مشخص نیست که زاویهٔ B قائمه است، پس این استدلال صحیح نیست.

۱۶

گزینه ۱

استدلال علی نادرست است. مثال نقض زیر را در نظر بگیرید:

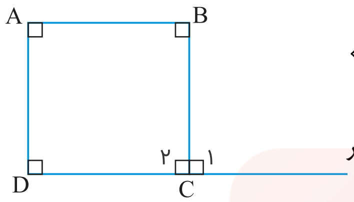
می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین میانهٔ وارد بر قاعده همان ارتفاع است، پس داریم:



$$\overset{\Delta}{ABM}\ : AB^{2} = BM^{2} + AM^{2} \Rightarrow 25 = 16 + AM^{2}$$

$$\Rightarrow AM^{2} = 9 \Rightarrow AM = 3 \Rightarrow AM \neq \frac{BC}{2}$$

استدلال حامد نادرست است. برای مثال نقض مربع که یک چهارضلعی محدب است را در نظر بگیرید:



$$\begin{cases} \hat{C}_1 = 90^\circ \\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 270^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B} + \hat{D}$$

استدلال مهدی نادرست است. زیرا در مثلث ABC اندازهٔ دو زاویهٔ دیگر مشخص نشده است و نمی‌توان گفت که مثلث قائم‌الزاویه است.

۱۷

گزینه ۲

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

مورد الف : درست ـ مجموع زاویه‌های خارجی هر n ضلعی ۳۶۰ درجه است. در مستطیل هر چهار زاویه برابر و ۹۰ درجه هستند می‌دانیم هر زاویه داخلی با زاویه خارجی‌اش مکمل یکدیگرند و مکمل ۹۰ درجه خود ۹۰ درجه است و همیشه جمع سه زاویه خارجی که برابر ۹۰ درجه هستند، ۲۷۰ درجه می‌شود.

مورد ب : درست ـ از خواص همه متوازی‌الاضلاع‌ها است.

مورد پ : نادرست ـ چون در مستطیل هم قطرها با هم برابرند باید ذکر می‌شد که مستطیل است نه مربع، چون مربع نیز نوعی مستطیل است.

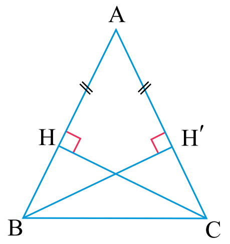
مورد ت : نادرست ـ در ذوزنقه متساوی‌الساقین قطرها با هم برابرند ولی همدیگر را نصف نمی‌کنند.

۱۸

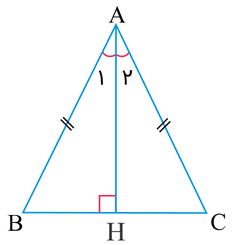
گزینه ۳

گزینهٔ "۳" نادرست است؛ زیرا در مثلث با زاویهٔ باز، فقط دو ارتفاع خارج از مثلث می‌باشد و ارتفاع سوم داخل مثلث است.

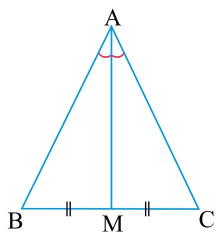
گزینه ۲



۱) $BH' = CH$



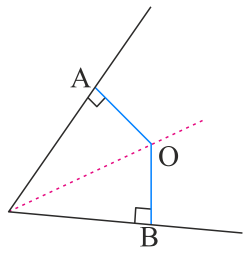
۳) $H = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$



۴) $BM = CM \Rightarrow \hat{M} = ۹۰^\circ$

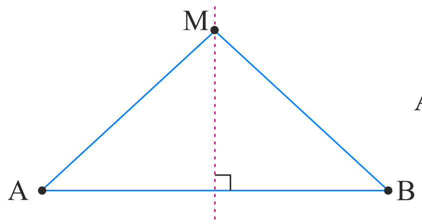
۲۰ گزینه ۲

الف) درست است.



$OA = OB$

ب) درست است.



$AM = MB$

پ) نادرست است؛ زیرا روی رأس قائم قرار می‌گیرد.

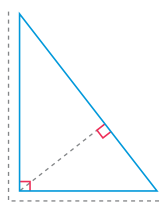
ت) درست است.

۲۱ گزینه ۲

در گزینهٔ "۲" استدلال نادرست است.

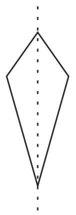
۲۲ گزینه ۱

در مثلث قائم‌الزاویه محل برخورد ارتفاع‌ها روی رأس قائم است.

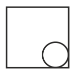


۲۳ گزینه ۳

گزینه ۱ : ذوزنقه نیست.



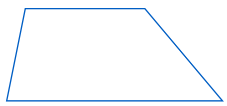
گزینه ۲ : فقط گفته‌شده دایره داخل مربع نگفته محاط‌شده، شکل زیر یک خط تقارن دارد.



گزینه ۳ : مثال نقض ندارد.
گزینه ۴ : نقطه روی دایره باشد بی‌شمار خط مماس رسم می‌شود.

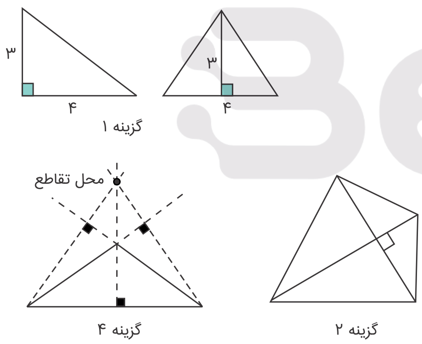
۲۴ گزینه ۳

گزینهٔ "۱": مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است که قطرهای آن برابر می‌باشد.
گزینهٔ "۲": در مثلث قائم‌الزاویه محل برخورد ارتفاع‌ها روی رأس قائم است.
گزینهٔ "۴": در ذوزنقهٔ داده‌شده هر چهار زاویه متفاوت است.



۲۵ گزینه ۳

عبارت گزینهٔ ۳ همواره درست است و مثال نقض ندارد.
مثال نقض سایر گزینه‌ها:



Bekrinoo
academy

۲۶ گزینه ۴

گزینهٔ "۴" مثال نقض ندارد و مثال نقض سایر گزینه‌ها عبارت‌اند از:
گزینهٔ "۱": مثلث قائم‌الزاویه که محل برخورد ارتفاع‌ها روی رأس قائم است.
گزینهٔ "۲": مثلث قائم‌الزاویه که محل برخورد عمودمنصف‌ها روی وتر است.
گزینهٔ "۳": ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

۲۷

گزینه ۲

فرض این است که قطرها یکدیگر را نصف کنند، یعنی $AM = MC$ و $BM = MD$ است.

۲۸

گزینه ۴

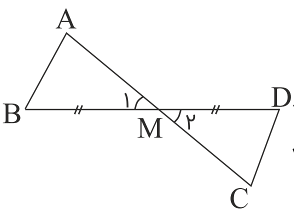
چون مثلث متساوی‌الساقین است، پس $AB = AC$ و $\hat{B} = \hat{C}$ و چون می‌دانیم AM میانه است، پس $BM = MC$ ولی باید اثبات کنیم $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$، پس جزء فرض نیست.

۲۹

گزینه ۴

داریم: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ و $BM = MD$

پس باید یکی از دو شرایط زیر استفاده شود.



۱) $\hat{B} = \hat{D}$

۲) $AM = MC$

که شرط دوم همان M وسط AC است.

۳۰

گزینه ۴

می‌دانیم که $AB = AD$ و $\widehat{B} = \widehat{D}$ است پس باید $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ یا $BE = FD$ را اضافه می‌کنیم که $BE = FD$ در گزینه‌ها می‌باشند.

۳۱

گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: اگر $AB \parallel CD$ باشد، بنابراین BC مورب بوده و زاویهٔ C با B برابر می‌شوند. باتوجه‌به اینکه OC و OB شعاع‌های دایره بوده و باهم برابرند، دو مثلث به حالت (زض‌ز) برابر می‌شوند.

گزینه ۲: اگر $\overline{AB} = \overline{CD}$ باشد، چون $OC = OB$ و $\hat{O}_2 = \hat{O}_1$ هستند، دو مثلث دارای دو ضلع برابر بوده ولی زاویه‌های $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ بین این دو ضلع نیستند و استدلال کافی برای همنهشتی دو مثلث وجود ندارد.

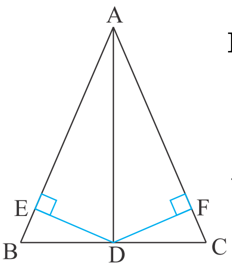
گزینه ۳: اگر $\hat{A} = \hat{D}$ باشد، باتوجه‌به اینکه $\hat{O}_2 = \hat{O}_1$ است، پس زاویهٔ سوم دو مثلث نیز باهم برابرند، پس $\hat{C} = \hat{B}$ می‌شود و همانند استدلال قبلی دو مثلث به حالت (زض‌ز) همنهشت می‌شوند

گزینه ۴: اگر $OA = OD$ باشد، با توجه به تساوی $BO = OC$ و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$، دو مثلث به حالت (ض‌زض) برابر می‌شوند.

.

۳۲

گزینه ۳



می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن به یک فاصله است. پس اگر AD نیمساز زاویهٔ A باشد، $DE = DF$ می‌شود. ازطرفی دو مثلث ADE و ADF قائم‌الزاویه هستند و داریم:

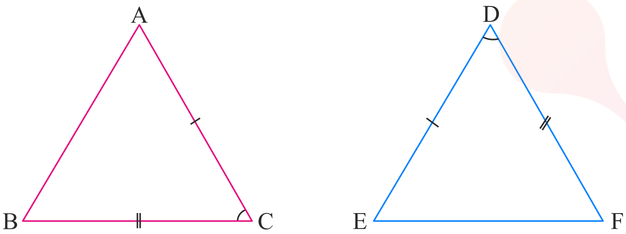
$$\begin{cases} AD = AD & \text{ضلع مشترک} \\ DE = DF \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{ADE} \cong \overset{\Delta}{ADF}$$

با فرض گرفتن سایر گزینه‌ها نمی‌توان نتیجه گرفت دو مثلث همنهشت هستند. پس گزینهٔ ۳ صحیح است.

۳۳

گزینه ۳

دو مثلث فرضی رسم می‌کنیم:

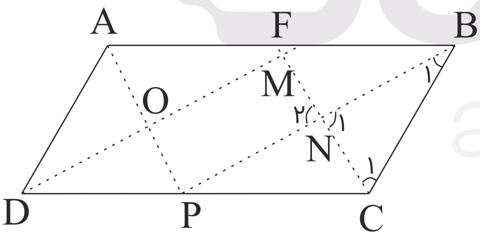


چون دو ضلع برابرند پس باید ضلع سوم و یا زاویهٔ بین آن‌ها برابر باشند که در گزینه‌ها فقط زاویه داریم، پس باید زاویهٔ بین آن‌ها را نام ببریم. پس: $\widehat{C} = \widehat{D}$

۳۴

گزینه ۳

$$\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = \frac{۱۸۰}{۲} = ۹۰ \Rightarrow \hat{N}_۱ = ۹۰ \Rightarrow \hat{N}_۲ = ۹۰$$



با همین مدل می‌توانیم متوجه شویم که همه زاویه‌ها ۹۰ درجه است، پس مستطیل خواهیم داشت (اضلاع برابر نیستند).

۳۵

گزینه ۳

حکم: $OH = OH'$ فاصله وترها تا مرکز برابر است.

۳۶

گزینه ۲

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۳۷ گزینه ۳

باید مثلث‌هایی را انتخاب کنیم که نصف هریک از قطرها، اضلاع مثلث باشند. پس مثلث‌های $\overset{\triangle}{DOC}$ و $\overset{\triangle}{AOB}$ یا $\overset{\triangle}{BOC}$ و $\overset{\triangle}{AOD}$ مناسب است که $\overset{\triangle}{BOC}$ و $\overset{\triangle}{AOD}$ در گزینهٔ ۳ می‌باشد.

۳۸ گزینه ۳

مرحلهٔ ۳ نادرست است؛ زیرا دو طرف را بر $(۱-۱)$ یعنی بر صفر تقسیم کرده‌ایم. نمی‌توانیم مخرج عددی را صفر در نظر بگیریم، پس نمی‌توانیم بر صفر تقسیم کنیم.

۳۹ گزینه ۳

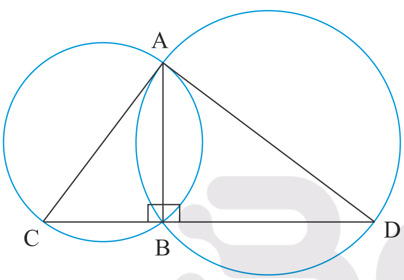
$$\left.\begin{array}{l} \text{در مثلث } ABC: \widehat{B}+\widehat{C}=۹۰^\circ \\ \text{در مثلث } AHC: \widehat{A}_۲+\widehat{C}=۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{B}=\widehat{A}_۲$$

۴۰ گزینه ۳

فاصله محل برخورد و نقطه همرسی عمود منصف‌های مثلث از سه راس مثلث به یک اندازه است.

۴۱ گزینه ۴

چون AC و AD قطر هستند پس برطبق رابطه‌های زاویه‌های محاطی (زاویه محاطی روبه‌رو به قطر ۹۰ درجه است) زاویه‌های ABC و ABD قائمه می‌شوند، بنابراین نقطه‌های B و C و D روی یک خط راست قرار می‌گیرند و مثلث تشکیل نمی‌دهند.



۴۲ گزینه ۴

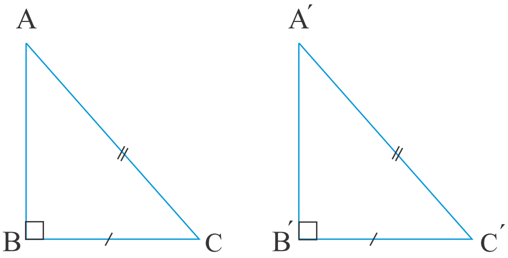
اگر نقطهٔ P روی نیمساز زاویهٔ A باشد، داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{A}_۱=\hat{A}_۲ \quad \text{نیمساز } AP \\ \hat{M}=\hat{N}=۹۰^\circ \\ AP \quad \text{مشترک} \end{array}\right. \xrightarrow{\text{وز}} \overset{\triangle}{AMP} \cong \overset{\triangle}{ANP}$$

ولی در بقیهٔ گزینه‌ها، دلایل کافی نیست.

۴۳ گزینه ۴

بنا به فرض مسئله:



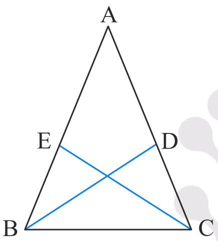
$$\begin{cases} AC = A'C' \\ BC = B'C' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

پس می‌تواند "و ض"، "و ز" و "زض ز" باشد، بنابراین همهٔ حالت‌ها صحیح است.

۴۴ گزینه ۲

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} A\hat{O}H = B\hat{O}H' \\ \hat{H} = \hat{H}' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \\ AH = BH' \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{AHO} \cong \overset{\triangle}{BH'O}$$

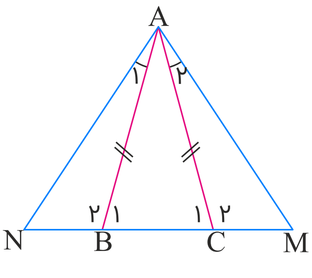
۴۵ گزینه ۲



$$\begin{cases} \widehat{B} = \widehat{C} \\ BE = DC \ \text{نصف ساق‌ها} \\ BC \ \text{مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{BCE} \cong \overset{\triangle}{BCD}$$

۴۶ گزینه ۲

در این دو مثلث داریم:



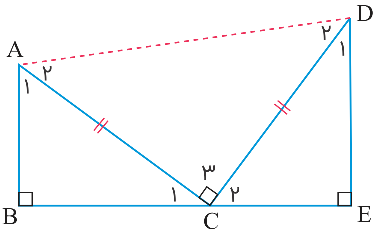
$$\begin{cases} \hat{B}_2 = \hat{C}_2 \\ AB = AC \end{cases}$$

پس باید $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ باشد و یا $BN = CM$ که $BN = CM$ در گزینه‌ها وجود دارد.

Sekrinoo academy

۴۷ گزینه ۴

از A به D وصل می‌کنیم:



$$\hat{C}_۳ = ۹۰ \Rightarrow C_۱ + C_۲ = ۹۰ \quad (*)$$

$$\begin{cases} \overset{\triangle}{ABC} : A_۱ + C_۱ = ۹۰ \\ \overset{\triangle}{CED} : D_۱ + C_۲ = ۹۰ \end{cases} \xrightarrow{+} A_۱ + D_۱ + (C_۱ + C_۲) = ۱۸۰$$

$$\xrightarrow{(*)} A_۱ + D_۱ = ۹۰$$

$$\begin{cases} A_۱ + C_۱ = ۹۰ \\ A_۱ + D_۱ = ۹۰ \end{cases} \Rightarrow C_۱ = D_۱$$

به طریق مشابه $A_۱ = C_۲$، بنابراین دو مثلث به حالت‌های زیر هم‌نهشت‌اند:

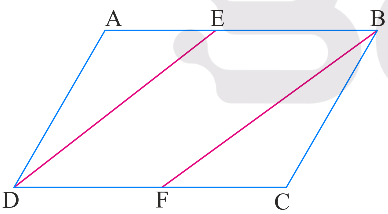
$$\begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{C}_۲ \\ C_۱ = D_۱ \\ AC = DC \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{CED}$$

$$\begin{cases} AC = CD \\ C_۱ = D_۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ تند}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{CED}$$

۴۸ گزینه ۲

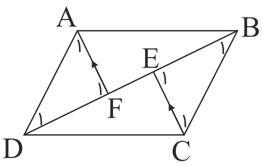
$$\begin{cases} AE = PC \\ FA = MC \\ \hat{A} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{AEF} \cong PCM$$

۴۹ گزینه ۳



$$\begin{cases} AE = CF \\ \hat{A} = \hat{C} \\ AD = BC \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ADE} \cong \overset{\triangle}{BCF}$$

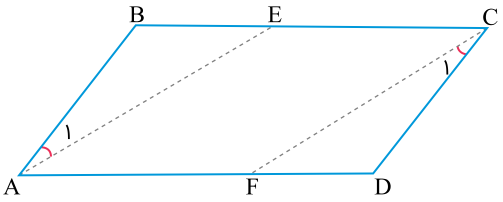
۵۰ گزینه ۳



$$\begin{cases} \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \\ \hat{F}_۱ = \hat{E}_۱ \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱$$

$$\begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ \\ \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \\ AD = BC \end{cases} \xrightarrow{\text{زضز}} \overset{\triangle}{AFD} \cong \overset{\triangle}{BCE}$$

۵۱ گزینه ۱



$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ AB = CD \\ \hat{B} = \hat{D} \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} A\overset{\triangle}{B}E \cong F\overset{\triangle}{C}D$$

۵۲ گزینه ۲

$$A\overset{\triangle}{D}N \cong B\overset{\triangle}{M}C\ ,\ A\overset{\triangle}{B}N \cong D\overset{\triangle}{M}C\ ,\ A\overset{\triangle}{B}D \cong B\overset{\triangle}{C}D$$

۳ جفت مثلث هم‌نهشت وجود دارد.

۵۳ گزینه ۳

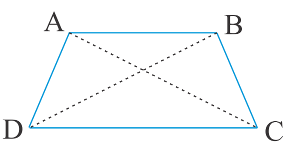
مثلث‌های DCH با ABH'، CEH با AFH'، DCE با ABF، ADC با ABC و ADH با CBH' هم‌نهشت هستند.

۵۴ گزینه ۲

$$\begin{cases} AD = BC \\ DE = EC \\ \hat{D} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} A\overset{\triangle}{D}E \cong B\overset{\triangle}{C}E$$

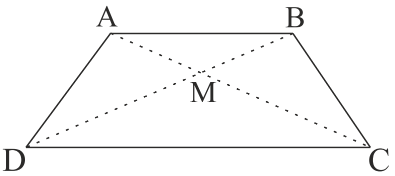
Bekrinoo academy

۵۵ گزینه ۲



$$\begin{cases} AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} \\ DC \text{ مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ADC} \cong \overset{\triangle}{BCD}$$

۵۶ گزینه ۲



مثلث‌های ABD با ABC، AMD با BMC و BCD با ACD همنهشت هستند.

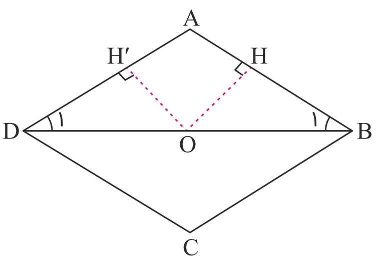
۵۷ گزینه ۳

در گزینهٔ ۳ دلایل کافی برای همنهشتی دو مثلث وجود ندارد.

۵۸ گزینه ۳

$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{D} \\ AB = AD \\ BM = DN \end{cases} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\triangle}{ABM} \cong \overset{\triangle}{ADN}$$

۵۹ گزینه ۳



$$\begin{cases} OB = OD \ \text{وتر} \\ \hat{H} = \hat{H}' \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{cases} \xrightarrow{\text{وز}} \overset{\triangle}{OHB} \cong \overset{\triangle}{ODH'}$$

۶۰ گزینه ۱

$$\begin{cases} AB = AD (\text{وتر}) \ \text{اضلاع لوزی} \\ \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ \\ \widehat{B} = \widehat{D} \ \text{مکمل زاویه های مقابل لوزی} \end{cases} \xrightarrow{\text{وز}} \overset{\triangle}{ABE} \cong \overset{\triangle}{ADF}$$

۶۱ گزینه ۳

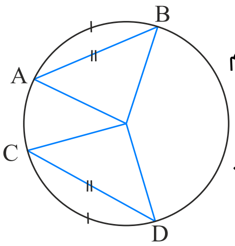
مثلث‌های همنهشت عبارت‌اند از:

$(ABP\ ,\ ADQ)\ ,\ (BPM\ ,\ QND)\ ,\ (ABM\ ,\ ADN)\ ,\ (APD\ ,\ ABQ)\ ,\ (ABD\ ,\ BCD)$

۵ جفت مثلث همنهشت وجود دارد.

Bekrinoo academy

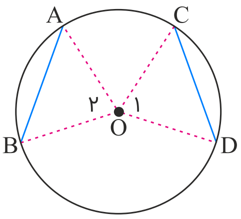
۶۲ گزینه ۱



فرض : $AB = CD$

حکم : $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

$$\begin{cases} AB = CD \\ OC = OA \\ OB = OD \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\overset{\Delta}{A}B \cong O\overset{\Delta}{C}D$$

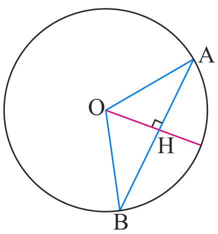


۶۳ گزینه ۴

همهٔ حالت‌ها را می‌توان استفاده کرد ولی حالت سه ضلع امکان ندارد.

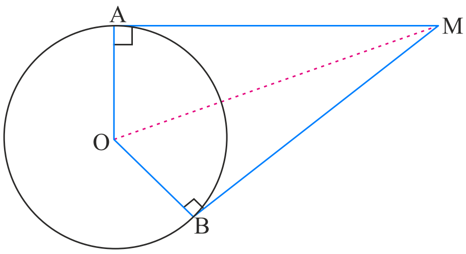
۶۴ گزینه ۱

فرض : $H = ۹۰^\circ$ ، حکم : $AH = BH$



$$\begin{cases} OA = OB \ \text{وتر} \\ \widehat{H}_۱ = \widehat{H}_۲ \\ OH \ \text{مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\text{وض}} O\overset{\Delta}{A}H \cong O\overset{\Delta}{B}H$$

۶۵ گزینه ۱

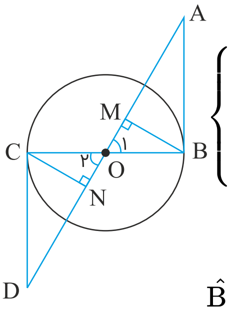


حکم : $MA = MB$

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{B} \\ OA = OB \\ OM \ \text{مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\text{وض}} A\overset{\Delta}{M}O \cong B\overset{\Delta}{M}O$$

۶۶ گزینه ۳

باتوجه‌به شکل زیر داریم:



$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \ \text{متقابل به رأس} \\ OB = OC \ \text{شعاع} \\ \hat{M} = \hat{N} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه}} O\overset{\Delta}{M}B \cong O\overset{\Delta}{N}C$$

می‌دانیم که شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، بنابراین:

$$\hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$$

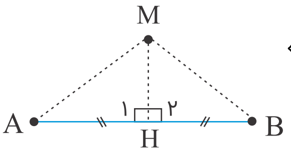
$$\begin{cases} OB = OC \ \text{شعاع} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \ \text{متقابل به رأس} \\ \hat{B} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{\text{دو زاویه و ضلع بین}} O\overset{\Delta}{B}A \cong O\overset{\Delta}{C}D \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ AB = CD \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ AB = CD \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و زاویه حاده}} M\overset{\Delta}{B}A \cong N\overset{\Delta}{D}C$$

درنتیجه سه جفت مثلث هم‌نهشت داریم.

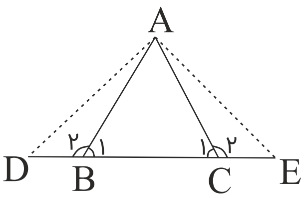
Bekrinoo academy

۶۷ گزینه ۱



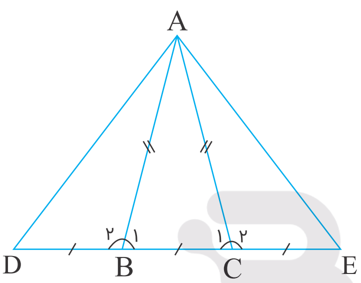
$$\begin{cases} MH \ \text{مشترک} \\ \hat{H}_{۱} = \hat{H}_{۲} = ۹۰^\circ \\ AH = BH \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{AMH} \cong \overset{\triangle}{MBH} \Rightarrow AM = MB$$

۶۸ گزینه ۱



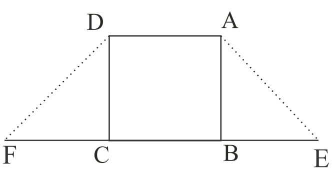
$$\begin{cases} AB = AC \\ BD = CE \\ \hat{B}_{۱} = \hat{C}_{۱} \Rightarrow \hat{B}_{۲} = \hat{C}_{۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{ACE}$$

۶۹ گزینه ۳



$$\begin{cases} AB = AC \\ BD = CE \\ \hat{B}_{۱} = \hat{C}_{۱} \Rightarrow \hat{B}_{۲} = \hat{C}_{۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{ACE}$$

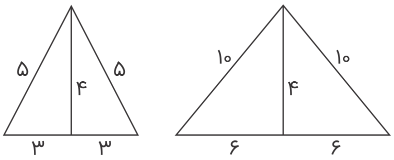
۷۰ گزینه ۱



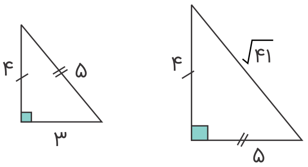
$$\begin{cases} AB = DC \\ BE = FC \\ \hat{B} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABE} \cong \overset{\triangle}{DCF}$$

۷۱ گزینه ۴

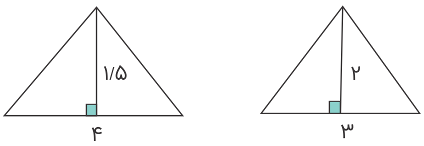
رد گزینهٔ ۱:



رد گزینهٔ ۲:



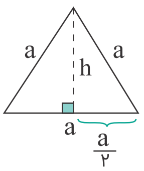
رد گزینهٔ ۳:



$$S_۱ = S_۲ = ۳$$

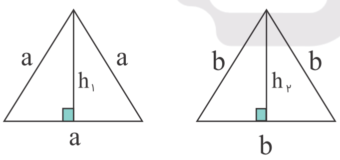
گزینهٔ ۴:

ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$a^۲ = h^۲ + \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ \Rightarrow h^۲ = a^۲ - \frac{a^۲}{۴}$$

$$h^۲ = \frac{۳a^۲}{۴} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$



$$\Rightarrow h_۱ = h_۲ \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{\sqrt{۳}}{۲}b \Rightarrow a = b$$

دو مثلث بنا به حالت ۳ ضلع باهم همنهشت می‌شوند.

۷۲ گزینه ۲

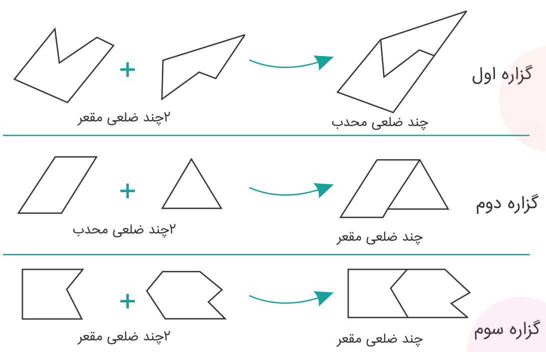
$$\begin{cases} AC = B'C' \\ \hat{A} = \hat{C}' \\ \hat{C} = \hat{B}' \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{ABC} \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$$

دو مثلث همنهشت هستند، پس:

$$BC = A'B' \Rightarrow y + ۵ = ۲y - ۳ \Rightarrow y = ۸$$

$$AB = A'C' \Rightarrow ۲x - ۲ = x + ۱ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow x + y = ۸ + ۳ = ۱۱$$

۷۳ گزینه ۴

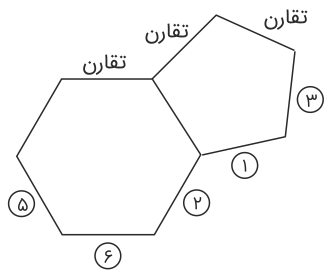


Bekrinoo academy

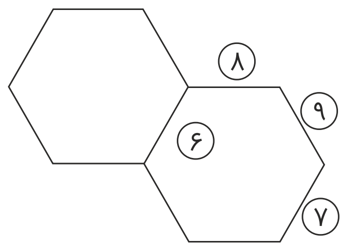
۷۴

گزینه ۳

حالت‌های مختلف را با توجه به این‌که در تقارن یا دوران روی‌هم نیافتند در نظر می‌گیریم:



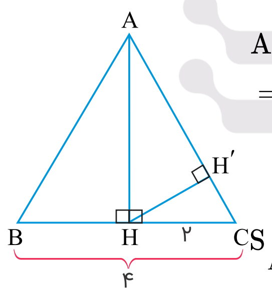
در حالت‌های نشان‌داده‌شده ۵ حالت وجود دارد (برای چسباندن شش ضلعی منتظم دوم) پنج ضلعی می‌تواند در داخل شش ضلعی نیز قرار بگیرد. محل آن را شماره‌گذاری می‌کنیم.



۷۵

گزینه ۱

می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع مثلث میانه نیز می‌باشد. درنتیجه AH میانهٔ وارد بر ضلع BC است، حال داریم:



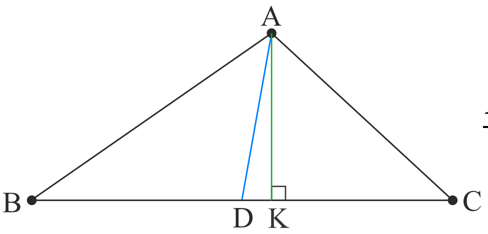
$$\overset{\Delta}{AHC}: AH^۲ + HC^۲ = AC^۲ \Rightarrow AH^۲ + ۲^۲ = ۴^۲$$
$$\Rightarrow AH^۲ = ۱۶ - ۴ = ۱۲ \Rightarrow AH = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$$

مساحت مثلث AHC به دو صورت زیر قابل محاسبه است:

$$S_{\overset{\Delta}{AHC}} = \frac{۱}{۲}AH \times HC = \frac{۱}{۲}HH' \times AC$$
$$\Rightarrow AH \times HC = HH' \times AC \Rightarrow ۲\sqrt{۳} \times ۲ = HH' \times ۴ \Rightarrow HH' = \sqrt{۳}$$

۷۶

گزینه ۱



چون AD میانه است، $CD = DB$ می‌باشد، همچنین AK ارتفاع وارد بر ضلع BC است.
پس مساحت دو مثلث ABD و ACD برابرند، بنابراین:

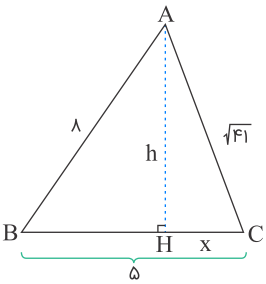
$$\frac{AB \times DH'}{۲} = \frac{AC \times DH}{۲} \Rightarrow AB \times DH' = AC \times DH$$

و چون $AC > AB$ است، پس باید $DH' < DH$ باشد.

۷۷

گزینه ۱

روش اول:
نکته ۱: بزرگ‌ترین ارتفاع، ارتفاع وارد بر کوچک‌ترین قاعده می‌باشد.
نکته ۲: می‌دانیم اگر در مثلثی به اضلاع a, b, c رابطهٔ $a^۲ < b^۲ + c^۲$ برقرار باشد، تمامی زوایای مثلث حاده هستند.
حال چون $۸^۲ < (\sqrt{۴۱})^۲ + ۵^۲$ است، پس زاویه‌های مثلث حاده هستند.



باتوجه‌به شکل ارتفاع عددی بین $\sqrt{۴۱}$ و ۸ می‌باشد که به $\sqrt{۴۱}$ نزدیک‌تر است. در بین گزینه‌ها ۶/۴ و ۷/۲ بین $\sqrt{۴۱}$ و ۸ است که ۶/۴ نزدیک به $\sqrt{۴۱}$ می‌باشد.
روش دوم:

$$\overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow x^۲ + h^۲ = (\sqrt{۴۱})^۲ \Rightarrow x^۲ + h^۲ = ۴۱ \Rightarrow h^۲ = ۴۱ - x^۲ \quad (۱)$$

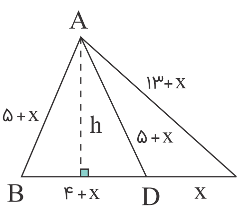
$$\overset{\Delta}{HBC} \Rightarrow (۵ - x)^۲ + h^۲ = ۶۴ \Rightarrow h^۲ = ۶۴ - (۵ - x)^۲ = ۶۴ - ۲۵ - x^۲ + ۱۰x \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow ۴۱ - x^۲ = ۳۹ - x^۲ + ۱۰x \Rightarrow ۲ = ۱۰x \Rightarrow x = ۰/۲$$

$$h^۲ = ۴۱ - (۰/۲)^۲ \Rightarrow h^۲ = ۴۰/۹۶ \Rightarrow h = \sqrt{۴۰/۹۶} \simeq ۶/۴$$

۷۸

گزینه ۴



$$h^۲ = (۵ + x)^۲ - \left(\frac{۴ + x}{۲}\right)^۲ \Rightarrow h^۲ = ۲۵ + x^۲ + ۱۰x - ۴ - \frac{x^۲}{۴} - ۲x$$

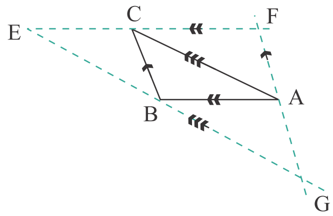
$$h^۲ = (۱۳ + x)^۲ - \left(x + \frac{۴ + x}{۲}\right)^۲ \Rightarrow h^۲ = ۱۶۹ + x^۲ + ۲۶x - \frac{۹x^۲}{۴} - ۴ - ۶x$$

$$Ch^۲ = h^۲ \Rightarrow ۲۵ + x^۲ + ۱۰x - ۴ - \frac{x^۲}{۴} - ۲x = ۱۶۹ + x^۲ + ۲۶x - \frac{۹x^۲}{۴} - ۴ - ۶x$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۱۲x - ۱۴۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۶x - ۷۲ = ۰ \Rightarrow (x + ۶)(x - ۱۲) = ۰ \Rightarrow x = ۱۲$$

۷۹

گزینه ۴



$BC \| AF \ , \ CF \| BA \Rightarrow$ متوازی‌الاضلاع $BCFA \Rightarrow FA = BC \ , \ CF = AB$

$BC \| AG \ , \ AC \| BG \Rightarrow$ متوازی‌الاضلاع $AGBC \Rightarrow AG = BC \ , \ BG = AC$

$EC \| AB \ , \ AC \| BE \Rightarrow$ متوازی‌الاضلاع $ABEC \Rightarrow EC = AB \ , \ AC = EB$

$\Rightarrow EF = EC + CF = AB + AB = ۲AB$

$EG = EB + BG = AC + AC = ۲AC$

$FG = FA + AG = BC + BC = ۲BC$

$AC > AB > BC \Rightarrow ۲AC > ۲AB > ۲BC \Rightarrow EG > EF > FG$

درنتیجه $FG = ۲BC$ کوچک‌ترین ضلع مثلث است.

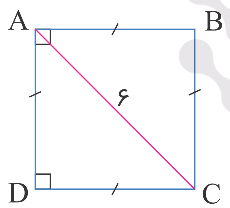
۸۰

گزینه ۳

مساحت یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a از رابطهٔ $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$ به دست می‌آید، پس:

$$S_{\text{شش ضلعی}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(\sqrt{۲})^۲ = ۳\sqrt{۳}$$

همچنین مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC، نصف مساحت مربع $ABCD$ است. ازطرفی مساحت مربع برابر است با:

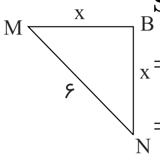


$$S_{\text{مربع}} = \frac{(\text{قطر})^۲}{۲} = \frac{۶^۲}{۲} = ۱۸$$

پس مساحت مثلث برابر با ۹ است. حال داریم:

$$\frac{S_{\text{شش ضلعی}}}{S_{\text{مثلث}}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۹} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۸۱ گزینه ۲



$S_{MNPQ} = ۳۶ = ۶^۲ \Rightarrow$ هر ضلع مربع $= ۶$

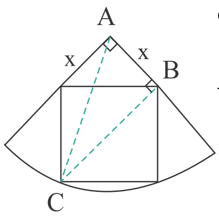
$\Rightarrow x^۲ + x^۲ = ۶^۲ \Rightarrow ۲x^۲ = ۳۶$

$\Rightarrow x^۲ = ۱۸$

$\Rightarrow x = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$

x نصف ضلع مربع است، پس ضلع ABCD برابر $۲ \times ۳\sqrt{۲} = ۶\sqrt{۲}$ است؛ بنابراین محیط آن برابر $۴ \times ۶\sqrt{۲} = ۲۴\sqrt{۲}$ است.

۸۲ گزینه ۳



ضلع مربع $= \sqrt{۲}x \Rightarrow$ قطر مربع $= \sqrt{۲}x \times \sqrt{۲} = ۲x$

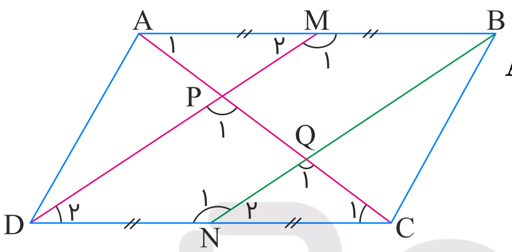
$\overset{\Delta}{AB}C : \hat{B} = ۴۵^\circ + ۴۵^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow$ قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{AB}C$, $AC = ۱$

قضیهٔ فیثاغورس: $۱^۲ = AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow ۱ = x^۲ + (۲x)^۲ \Rightarrow ۱ = ۵x^۲ \Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۵} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۵}}{۵}$

ضلع مربع $= \sqrt{۲}x = \sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۵}}{۵} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$

۸۳ گزینه ۲

از B به N (وسط DC) وصل می‌کنیم.



$AB = CD \Rightarrow AM = MB = NC = ND$

$\left.\begin{array}{l} MB = DN \\ MB \| DN \end{array}\right\} \Rightarrow$ متوازی‌الاضلاع $MBND \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{N}_۱ \Rightarrow \hat{M}_۲ = \hat{N}_۲$

$\left.\begin{array}{l} \text{موازی مورب } \hat{P}_۱ = \hat{Q} \\ \text{موازی مورب } \hat{N}_۲ = \hat{D}_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{زز} \overset{\Delta}{CQN} \sim \overset{\Delta}{CPD}$

$\Rightarrow \frac{CQ}{CP} = \frac{CN}{CD} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow CP = ۲CQ$

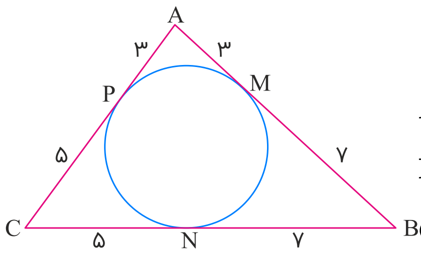
$\left.\begin{array}{l} \hat{M}_۲ = \hat{N} \\ \text{موازی مورب } \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ \\ AM = NC \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMP} \cong \overset{\Delta}{CQN} \Rightarrow AP = CQ$

$\Rightarrow CQ = QP = AP = \frac{AC}{۳} = \frac{۶}{۳} = ۲$

۸۴

گزینه ۲

می‌دانیم از هر نقطه خارج از دایره، دو مماس بر دایره رسم می‌شوند که این دو مماس باهم برابرند.



$$AM = ۳ \Rightarrow AP = ۳$$

$$MB = ۷ \Rightarrow NB = ۷$$

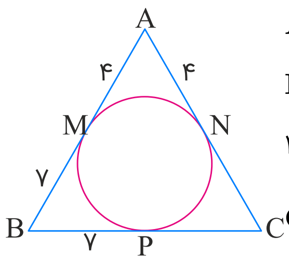
$$CP = ۵ \Rightarrow CN = ۵$$

$$\text{محیط مثلث} : (۳ + ۷ + ۵) \times ۲ = ۳۰$$

۸۵

گزینه ۴

از هر نقطه خارج از دایره دو مماس رسم می‌شود که باهم برابرند.



$$AN = ۴ \Rightarrow AM = ۴$$

$$BP = ۷ \Rightarrow BM = ۷$$

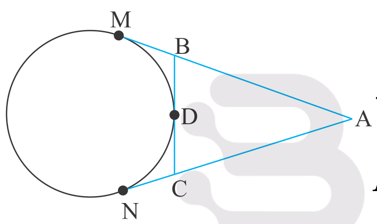
$$۳۲ - (۴ + ۴ + ۷ + ۷) = ۳۲ - ۲۲ = ۱۰$$

$$CN + CP = ۱۰ \Rightarrow CP = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

۸۶

گزینه ۲

چون از نقطهٔ A مماس بر دایره رسم شده است، پس $AN = AM$ می‌باشد. ازطرفی از نقاط B و C هم بر دایره مماس‌هایی داریم:



$$\begin{cases} BD = BM \\ CD = CN \end{cases}$$

$$\text{محیط مثلث } ABC = AB + AC + BC = AB + AC + BD + DC$$

$$= AB + BD + AC + CD = AB + BM + AC + CN$$

$$= AM + AN = ۲AM = ۲ \times ۱۰ = ۲۰$$

۸۷

گزینه ۲

هرگاه از یک نقطه بر دایره‌ای مماس داشته باشیم، مماس‌ها با هم برابرند.

$$۳x - ۲ = ۲x + ۵ \Rightarrow x = ۷$$

$$۳x - ۲ = y + ۴ \xrightarrow{x=۷} ۱۹ = y + ۴ \Rightarrow y = ۱۵$$

$$y - x = ۱۵ - ۷ = ۸$$

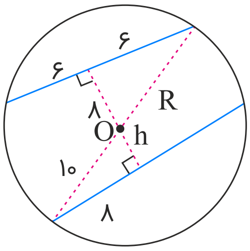
۸۸ گزینه ۳

در چهارضلعی محیطی، مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است.

$$۲x+۱+x=۱۲+۴ \Rightarrow ۳x+۱=۱۶ \Rightarrow ۳x=۱۵ \Rightarrow x=۵$$
$$\Rightarrow ۳x-۱=۳(۵)-۱=۱۴$$

(از نکتهٔ "طول مماس‌های وارد بر دایره از یک نقطه خارج از آن باهم برابر است" استفاده کرده‌ایم.)

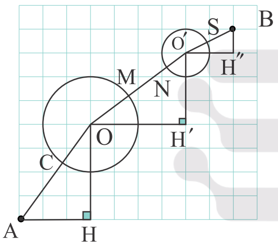
۸۹ گزینه ۳



$$R^۲=۶^۲+۸^۲ \Rightarrow R=۱۰$$
$$۱۰^۲=h^۲+۸^۲ \Rightarrow h^۲=۳۶ \Rightarrow h=۶$$

۹۰ گزینه ۱

مسیری که در شکل نمایش داده شده است، کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای رسیدن از A به B است. حال هرکدام از پاره‌خط‌هایی که در قسمت دایره نیستند را حساب می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} OA^۲=AH^۲+OH^۲=۳^۲+۴^۲=۲۵ \Rightarrow OA=۵ \\ \text{شعاع دایره } OC=۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{AC=۳}$$

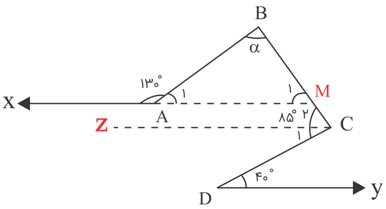
$$\left.\begin{array}{l} OO'^۲=OH'^۲+O'H'^۲=۴^۲+۳^۲=۲۵ \Rightarrow OO'=۵ \\ OM=۲\ ,\ NO'=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{MN=۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} O'B^۲=O'H''^۲+H''B^۲=۲^۲+۱^۲=۵ \Rightarrow O'B=\sqrt{۵} \\ O'S=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{SB=\sqrt{۵}-۱}$$

$$\text{مسیر موردنظر } AC+MN+SB=۳+۲+\sqrt{۵}-۱=۴+\sqrt{۵}$$

۹۱ گزینه ۳

از نقاط A و C دو خط موازی Ax و Dy رسم می‌کنیم.



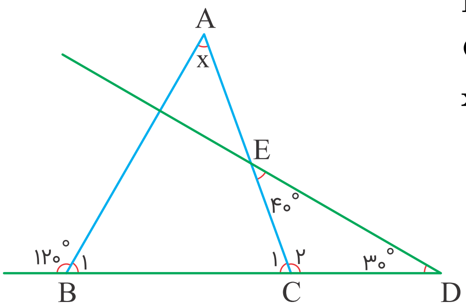
$$\left.\begin{array}{l} Dy \| CZ \\ \text{مورب } DC \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D} = \hat{C}_۱ = ۴۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۲ = ۸۵^\circ - ۴۰^\circ = ۴۵^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} CZ \| Ax \\ \text{مورب } MC \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{M}_۱ = \hat{C}_۲ \\ \hat{C}_۲ = ۴۵^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}_۱ = ۴۵^\circ$$

$$\hat{A}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۱۳۰^\circ = ۵۰^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = ۱۸۰^\circ - (۵۰^\circ + ۴۵^\circ) = ۱۸۰^\circ - ۹۵^\circ = ۸۵^\circ$$

۹۲ گزینه ۲

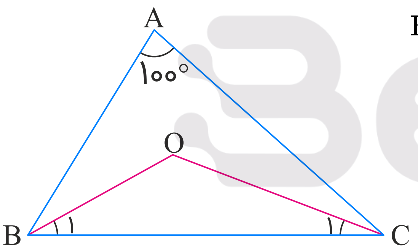


$$\hat{B}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۱۲۰^\circ = ۶۰^\circ$$

$$\hat{C}_۱ = ۳۰^\circ + ۴۰^\circ = ۷۰^\circ$$

$$x + \hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = x + ۶۰^\circ + ۷۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۵۰^\circ$$

۹۳ گزینه ۴



$$\hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ - \hat{A} = ۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{۲} = \frac{۸۰^\circ}{۲} = ۴۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{O} = ۱۸۰^\circ - (\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱) = ۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ = ۱۴۰^\circ$$

Bekrinoo academy

۹۴ گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} + \hat{y} + \hat{B} = ۱۸۰ \\ \hat{x} + \hat{y} + \hat{B} = ۱۸۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{x} = \hat{A}$$

$$\hat{x} + \hat{y} + \hat{B} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{B} = ۱۸۰ - (\hat{x} + \hat{y})$$

$$\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{x}{۱۸۰ - (x + y)}$$

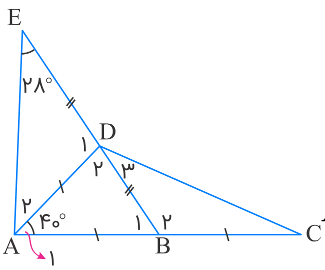
۹۵ گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \xrightarrow{\hat{C}=\hat{y}} \hat{A}+\hat{B}+\hat{y}=180^\circ \\ \hat{x}+\hat{y}+\hat{B}=180^\circ\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\cancel{\hat{B}}+\cancel{\hat{y}}=\hat{x}+\cancel{\hat{y}}+\cancel{\hat{B}} \Rightarrow \hat{A}=\hat{x}$$

۹۶ گزینه ۳

مثلث ABD متساوی‌الساقین است، پس $\hat{D}_2=\hat{B}_1$، بنابراین مکمل‌های آن‌ها نیز برابرند.



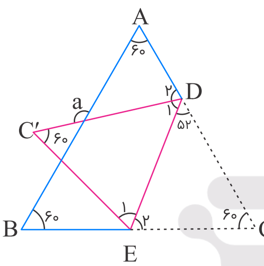
$$\begin{cases}\hat{D}_1=\hat{B}_2 \\ DE=DB \quad \text{فرض مسئله} \\ BC=AD \quad \text{فرض مسئله}\end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ADE} \cong \overset{\triangle}{BCD} \Rightarrow \hat{C}=\hat{A}_2$$

$$\hat{A}_1=40 \Rightarrow 180-40=140 \Rightarrow \begin{cases}\hat{D}_2=70 \\ \hat{B}_1=70\end{cases} \Rightarrow \hat{D}_1=110$$

در مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$: $\hat{A}_2=180-(110+28)=180-138=42^\circ$

$$\Rightarrow \hat{A}_2=\hat{C} \Rightarrow \hat{C}=42^\circ$$

۹۷ گزینه ۳



دو مثلث DEC و DEC' همنهشت‌اند و تمامی اضلاع و زوایای نظیر باهم برابرند. پس است. حال داریم:

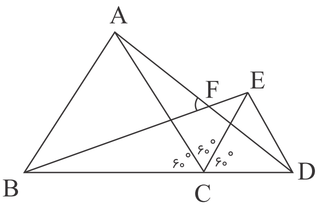
$$E_1=E_2=180-\overset{112}{\cancel{(60+52)}}=68^\circ$$

$$D_2=180-(52+52)=180-104=76^\circ$$

زاویهٔ خارجی $a \Rightarrow \hat{a}=\hat{A}+\hat{D}_2=60+76=136^\circ$

۹۸ گزینه ۱

دقت کنید که زاویهٔ $A\hat{F}B$، زاویهٔ خارجی مثلث BFD است.

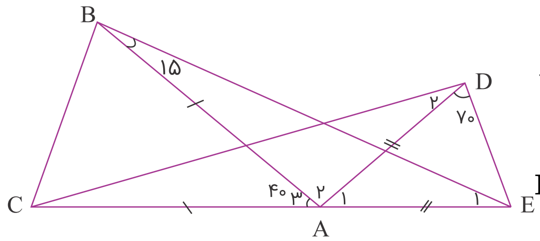


$$\left.\begin{array}{l}BC=AC \\ E\hat{C}B=A\hat{C}D \\ DC=EC\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ACD} \cong \overset{\triangle}{BCE} \Rightarrow D\hat{A}C=E\hat{B}C$$

$$\overset{\triangle}{ACD} \Rightarrow D\hat{A}C+A\hat{D}C=60^\circ \Rightarrow E\hat{B}C+A\hat{D}C=60^\circ \xrightarrow{\overset{\triangle}{BFD}} A\hat{F}B=60^\circ$$

Sekrinoo academy

۹۹ گزینه ۱



$$\begin{cases} \hat{D} = \hat{E} = ۷۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = ۱۸۰ - ۱۴۰ = ۴۰^\circ \\ \hat{A}_۲ = ۱۸۰ - (A_۱ + A_۳) = ۱۸۰ - (۴۰ + ۴۰) = ۱۰۰^\circ \\ A_۱ + A_۲ = A_۲ + A_۳ = ۱۴۰^\circ \end{cases}$$

$$E_۱ = ۱۸۰ - (B + (A_۱ + A_۲)) = ۱۸۰ - (۱۵ + ۱۴۰) = ۲۵^\circ$$

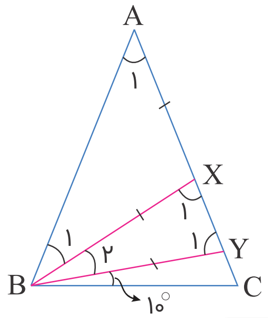
دو مثلث AEB و ADC بنا بر حالت (ض ز ض) همنهشت می‌شوند، زیرا:

$$\begin{cases} AB = AC \\ AD = AE \\ A_۲ + A_۳ = A_۱ + A_۲ = ۱۴۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} ADC \cong AEB$$

پس $\hat{D}_۲ = \hat{E}_۱ = ۲۵^\circ$ می‌شود.

۱۰۰ گزینه ۳

باتوجه‌به معلومات سؤال داریم:



$$\begin{cases} \hat{X}_۱ = \hat{Y}_۱ \\ \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ \\ \hat{C} = \hat{B} = \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ + ۱۰^\circ \end{cases}$$

خارجی $\hat{X}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{B}_۱ = ۲\hat{A}_۱ = ۲\hat{B}_۱ = Y_۱$

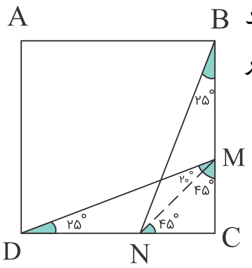
$$\hat{B}_۲ = ۱۸۰^\circ - (\hat{X}_۱ + \hat{Y}_۱) = ۱۸۰^\circ - ۲\hat{X}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۴\hat{B}_۱$$

$$\hat{B}_۱ = \hat{A}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۲\hat{C} = ۱۸۰^\circ - ۲(\hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ + ۱۰^\circ)$$

$$\Rightarrow \hat{B}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۲(-۳\hat{B}_۱ + ۱۹۰^\circ) = ۱۸۰^\circ + ۶\hat{B}_۱ - ۳۸۰^\circ$$

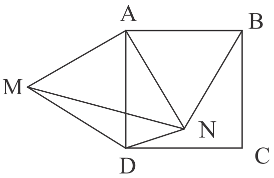
$$\Rightarrow ۵\hat{B}_۱ = ۳۸۰^\circ - ۱۸۰^\circ = ۲۰۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱ = ۴۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = ۴۰^\circ$$

۱۰۱ گزینه ۴



دو مثلث $\overset{\Delta}{BCN}$ و $\overset{\Delta}{DCM}$ به حالت (ض‌زض) باهم متشابه‌اند؛ بنابراین اجزای متناظر آن‌ها نیز باهم برابرند $N\hat{B}C = M\hat{D}C$ و $MC = NC$. با استفاده از قاعدهٔ مجموع زاویه‌های داخلی مثلث و محاسبات ساده زاویه موردنظر برابر ۲۰ درجه به دست می‌آید.

۱۰۲ گزینه ۱



$$\left.\begin{array}{l} \text{متساوی‌الاضلاع}\ \overset{\Delta}{ABN} \Rightarrow AB = AN \\ \text{مربع}\ ABCD \Rightarrow AB = AD \end{array}\right\} \Rightarrow AN = AD \quad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} AN = AD \\ \text{متساوی‌الاضلاع}\ \overset{\Delta}{MAD} \end{array}\right\} \Rightarrow MA = AD \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} MA = AN \Rightarrow \overset{\Delta}{NAM} \quad \text{متساوی‌الساقین}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{مربع}\ ABCD \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ \\ \text{مثلث متساوی‌الاضلاع}\ \overset{\Delta}{ABN} \Rightarrow N\hat{A}B = ۶۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow N\hat{A}D = ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow N\hat{A}D + D\hat{A}M = ۳۰^\circ + ۶۰^\circ = ۹۰^\circ$$

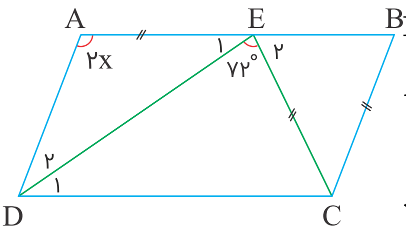
$$\text{متساوی‌الساقین}\ \overset{\Delta}{AMN} \Rightarrow A\hat{N}M = A\hat{M}N = ۴۵^\circ \quad (*)$$

$$AN = AD \Rightarrow \text{متساوی‌الساقین}\ \overset{\Delta}{AND} \Rightarrow ۲A\hat{N}D = ۱۸۰ - ۳۰ = ۱۵۰$$

$$A\hat{N}D = ۷۵^\circ \quad \xrightarrow{(*)} \quad M\hat{N}D = A\hat{N}D - A\hat{N}M = ۷۵^\circ - ۴۵^\circ = ۳۰^\circ$$

۱۰۳ گزینه ۲

$ABCD$ متوازی‌الاضلاع است، درنتیجه: $AD = BC$



$$\hat{E}_۱ + \hat{E}_۲ + ۷۲^\circ = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{E}_۱ + \hat{E}_۲ = ۱۰۸ \quad (*)$$

$$\overset{\Delta}{ADE}\ : ۲x + \hat{E}_۱ + \hat{D}_۲ = ۱۸۰ \xrightarrow{\hat{E}_۱ = \hat{D}_۲} ۲x + ۲\hat{E}_۱ = ۱۸۰$$

$$\Rightarrow \hat{E}_۱ = \frac{۱۸۰ - ۲x}{۲} = ۹۰ - x \quad (۱)$$

$$\hat{B}\ \text{و}\ \hat{A}\ \text{مکمل‌اند} \Rightarrow \hat{B} = ۱۸۰ - ۲x$$

$$\overset{\Delta}{CBE}\ : \hat{E}_۲ = \hat{B} = ۱۸۰ - ۲x \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(*)} \hat{E}_۱ + \hat{E}_۲ = ۱۰۸ \xrightarrow{(۱),(۲)} ۹۰ - x + ۱۸۰ - ۲x = ۱۰۸$$

$$\Rightarrow ۲۷۰ - ۳x = ۱۰۸ \Rightarrow ۳x = ۲۷۰ - ۱۰۸ = ۱۶۲ \Rightarrow x = \frac{۱۶۲}{۳} = ۵۴$$

۱۰۴

گزینه ۱

چهار ضلعی ABDC محاطی است؛ بنابراین اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{D}C$ برابر $180^\circ - 3x$ است، پس اندازهٔ $B\hat{D}M$ که مکمل زاویهٔ $B\hat{D}C$ است، برابر است با:

$$B\hat{D}M = 180^\circ - (180^\circ - 3x) = 3x$$

بنابراین چون $C\hat{D}N$ و $B\hat{D}M$ متقابل به رأس‌اند، پس $C\hat{D}N$ نیز برابر $3x$ است.

در مثلث DCA زاویهٔ $C\hat{D}N$ زاویهٔ خارجی می‌باشد و اندازهٔ آن برابر است با مجموع زوایای x و $C\hat{D}N$، پس زاویهٔ $D\hat{C}A$ برابر است با:

$$D\hat{C}A = 3x + x = 4x$$

به همین ترتیب زاویهٔ $A\hat{B}D$ نیز برابر $4x$ است. چون در چهار ضلعی محاطی ABCD، مجموع $A\hat{B}D$ و $D\hat{C}A$ برابر 180° است، پس داریم:

$$4x + 4x = 180^\circ \Rightarrow 8x = 180^\circ \Rightarrow \hat{x} = \frac{180}{8} = \frac{45}{2} = 22/5^\circ$$

۱۰۵

گزینه ۳

باید 360° بر زاویهٔ بین دو محور تقارن بخش‌پذیر باشد. در بین گزینه‌ها فقط عدد $(\frac{1}{5})^\circ$ وجود دارد که 360° بر آن بخش‌پذیر است.

۱۰۶

گزینه ۲

- هر دو مستطیل دلخواه متشابه نیستند.
- دو مثلث متساوی‌الساقین که یک رأس قائمه دارند به حالت سه ضلع متشابه هستند.
- دو مثلث متشابه، ممکن است همنهشت نباشند.
- چهارضلعی که هر دو زاویهٔ مجاور آن مکمل باشند، متوازی‌الاضلاع است.

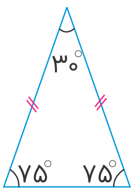
۱۰۷

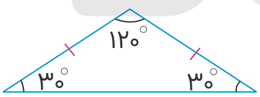
گزینه ۱

دو مورد "در هر لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند" و "در هر مثلث متساوی‌الاضلاع نیمساز هر زاویه، میانهٔ ضلع مقابل هم است" صحیح هستند.

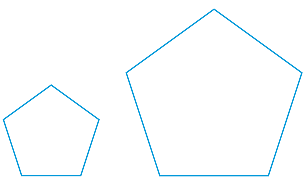
در هر مستطیل قطرها نیمساز زاویه‌ها نمی‌باشند.

دو مثلث متساوی‌الساقین اگر یک زاویهٔ مساوی داشته باشند، همواره متشابه نیستند. همانند مثال زیر:





اگر دو چندضلعی متشابه باشند لزوماً همنهشت نمی‌باشند، مانند مثال زیر:

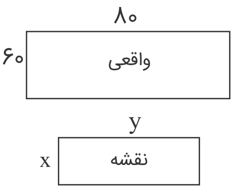


۱۰۸ گزینه ۲

$۲۰۰۰ \times ۱۲ = ۲۴۰۰۰$ سانتی‌متر (در اندازهٔ واقعی)

$\frac{۱}{۱۲۰۰} \quad \frac{\square}{۲۴۰۰۰} \Rightarrow \square = ۲۰$ سانتی‌متر

۱۰۹ گزینه ۲



$\frac{۸۰}{y} = \frac{۶۰}{x} = m$ نسبت تشابه

$\Rightarrow ۸۰x = ۶۰y \Rightarrow x = \frac{۳}{۴}y$

$۲(x+y) = ۱۴ \Rightarrow x + y = ۷ \xrightarrow{x=\frac{۳}{۴}y} \frac{۳}{۴}y + y = ۷ \Rightarrow y = ۴\,cm = ۰/۰۴\,m$

$m = \frac{۸۰}{y} = \frac{۸۰}{۰/۰۴} = ۲۰۰۰$

۱۱۰ گزینه ۳

محیط مثلث بزرگ در اندازهٔ واقعی برابر است با: $۸۷۵ = ۳۵۰ \times ۲/۵$. حال ازآنجاکه نسبت تشابه برابر محیط مثلث کوچک به محیط مثلث بزرگ است، پس محیط مثلث کوچک را پیدا می‌کنیم:

$\frac{۲}{۵} = \frac{\text{محیط مثلث کوچک}}{\text{محیط مثلث بزرگ}} \Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{\text{محیط مثلث کوچک}}{۸۷۵}$

$\Rightarrow \text{محیط مثلث کوچک} = ۳۵۰$

۱۱۱ گزینه ۱

ابتدا نسبت تشابه دو مثلث را می‌نویسیم و x را به دست می‌آوریم:

$\frac{۱۴}{x+۲} = \frac{۷}{x} \Rightarrow ۱۴x = ۷x + ۱۴ \Rightarrow ۷x = ۱۴ \Rightarrow x = ۲$

$\text{نسبت تشابه} = \frac{۷}{x} = \frac{۷}{۲}$

$\text{نسبت مساحت‌ها} = (\frac{۷}{۲})^۲ = \frac{۴۹}{۴}$

۱۱۲ گزینه ۴

نسبت اضلاع گزینهٔ "۴" نسبت به اضلاع مثلث داده‌شده برابر با $\frac{۱}{۳}$ است، ولی در بقیهٔ گزینه‌ها نسبت هر سه ضلع برابر نیست.

Sekrinoo academy

۱۱۳ گزینه ۳

اگر دو مثلث متشابه باشند، نسبت اضلاع آن‌ها برابرند.

$$\frac{۴}{۵} = \frac{۸}{y} = \frac{۱۰}{x}$$

$$\begin{cases} \frac{۴}{۵} = \frac{۸}{y} \Rightarrow y = ۱۰ \\ \frac{۴}{۵} = \frac{۱۰}{x} \Rightarrow x = \frac{۵۰}{۴} = ۱۲/۵ \end{cases} \Rightarrow \text{محیط مثلث} = ۵ + ۱۰ + ۱۲/۵ = ۲۷/۵$$

۱۱۴ گزینه ۳

محیط مثلث اولی برابر است با:

$$۱۲ + ۱۷ + ۲۱ = ۵۰$$

بنابراین نسبت تشابه برابر نسبت محیطهای دو مثلث است:

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{۵۰}{۲۰} = \frac{۵}{۲}$$

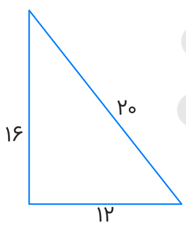
پس ضلع کوچک‌تر مثلث دوم برابر است با:

$$\frac{۵}{۲} = \frac{۱۲}{x} \Rightarrow x = \frac{۲ \times ۱۲}{۵} = \frac{۲۴}{۵} = ۴/۸$$

۱۱۵ گزینه ۱

چون متشابه می‌باشند، پس نسبت اضلاع آن‌ها برابر است.

$$\frac{۱۰}{۲۰} = \frac{۸}{x} = \frac{۶}{y} \Rightarrow x = ۱۶ \text{ , } y = ۱۲$$



اضلاع مثلث دوم ۱۲، ۱۶ و ۲۰ است که مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند.

$$\text{مساحت} : \frac{۱۲ \times \cancel{۱۶}^{۸}}{\cancel{۲}_{۱}} = ۹۶$$

Bekrinoo academy

۱۱۶ گزینه ۱

چون دو مثلث متشابه هستند، پس نسبت اضلاع برابر است.

$$\frac{۴}{y+۲}=\frac{۸}{۱۰}=\frac{x}{۱۵}\Rightarrow \frac{۴}{y+۲}=\frac{۸}{۱۰}\Rightarrow y+۲=۵\Rightarrow y=۳$$

$$\frac{۸}{۱۰}=\frac{x}{۱۵}\Rightarrow x=\frac{۸\times ۱۵}{۱۰}=۱۲\Rightarrow x+y=۱۲+۳=۱۵$$

۱۱۷ گزینه ۳

نسبت اضلاع برابر است.

$$\frac{۲x-۱}{۳}=\frac{y+۲}{۶}=\frac{۱۲}{۸}$$

$$\frac{۲x-۱}{۳}=\frac{۱۲}{۸}\Rightarrow \frac{۲x-۱}{۳}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۴x-۲=۹\Rightarrow ۴x=۱۱\Rightarrow x=\frac{۱۱}{۴}$$

$$\frac{y+۲}{۶}=\frac{۱۲}{۸}\Rightarrow \frac{y+۲}{۶}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲y+۴=۱۸\Rightarrow ۲y=۱۴\Rightarrow y=۷$$

$$۴x-y=۴\times\frac{۱۱}{۴}-۷=۱۱-۷=۴$$

۱۱۸ گزینه ۴

در مثلث دوم مشخص نیست که کدام ضلع بزرگ‌تر است. پس حالت‌های مختلف باید بررسی شود:

$$۱)\quad \underbrace{\frac{۳}{x-۱}=\frac{۶}{x+۳}}_{۶x-۶=۳x+۹\Rightarrow ۳x=۱۵\Rightarrow x=۵}=\frac{۸}{۲y-۲}$$

$$\frac{۳}{۴}=\underbrace{\frac{۶}{۸}=\frac{۸}{۲y-۲}}_{۱۲y-۱۲=۶۴\Rightarrow ۱۲y=۷۶\Rightarrow y=۶/۳۳}\qquad x+y=۵+۶/۳۳=۱۱/۳۳$$

$$۲)\quad \underbrace{\frac{۳}{x-۱}=\frac{۸}{x+۳}}_{۸x-۸=۳x+۹\Rightarrow ۵x=۱۷\Rightarrow x=۳/۴}=\frac{۶}{۲y-۲}$$

$$\underbrace{\frac{۳}{۲/۴}=\frac{۶}{۲y-۲}}_{۶y-۶=۱۴/۴\Rightarrow ۶y=۲۰/۴\Rightarrow y=۳/۴}=\frac{۸}{۶/۴}\qquad x+y=۶/۸$$

۱۱۹ گزینه ۲

هر سه حالت را بررسی می‌کنیم (۱۵ نمی‌تواند جواب x باشد).

$$\frac{۴}{x-۱}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=۱۳$$

$$\frac{۵}{x-۱}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=۱۶$$

$$\frac{۶}{x-۱}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=۱۹$$

Bekrinoo academy

۱۲۰ گزینه ۳

$$\overset{\Delta}{ABC} \text{ مساحت } = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{۲} = \frac{۶ \times \text{قاعده}}{۲} = ۲۴ \Rightarrow \text{ قاعده } = \frac{۲۴ \times ۲}{۶} = ۸$$

$$\text{نسبت قاعده‌ها} = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}$$

$$\text{نسبت مساحت‌ها} = (\frac{۴}{۳})^{۲} = \frac{۱۶}{۹}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۶}{۹} = \frac{۲۴}{x} \Rightarrow x = \frac{۲۴ \times ۹}{۱۶} = ۱۳/۵$$

۱۲۱ گزینه ۳

مثلث‌های ABD و ABC متشابه هستند، بنابراین نسبت اضلاع متناظر باهم برابر است.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{۶}{۱۲} = \frac{AD}{۸} = \frac{۳}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{۸} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow AD = ۴$$

۱۲۲ گزینه ۲

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{D} \\ \widehat{B} \quad \text{مشترک} \\ \widehat{E} = \widehat{C} \end{cases} \Rightarrow \frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC} = \frac{BD}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۲x + ۴} = \frac{۸}{y + ۳} = \frac{۴}{۱۶} = \frac{۱}{۴}$$

$$\begin{cases} \frac{۵}{۲x + ۴} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۲x + ۴ = ۲۰ \Rightarrow x = ۸ \\ \frac{۸}{y + ۳} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow y + ۳ = ۳۲ \Rightarrow y = ۲۹ \\ \Rightarrow x + y = ۸ + ۲۹ = ۳۷ \end{cases}$$

۱۲۳ گزینه ۴

چون دو مثلث ABC و MNP با نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$، متشابه هستند، می‌توان محیط مثلث ABC را محاسبه و در $\frac{۱}{۲}$ یا ۲ ضرب کنیم:

$$\text{فیثاغورس} : a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ \Rightarrow a = ۱۰$$

$$ABC \text{ محیط مثلث } = ۶ + ۸ + ۱۰ = ۲۴$$

محیط MNP می‌تواند ۱۲ یا ۴۸ باشد.

۱۲۴ گزینه ۳

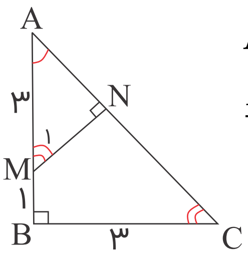
چون دو مثلث متشابه‌اند، پس زاویه‌های E و B هر دو قائمه‌اند.

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵$$
$$\Rightarrow AC = \sqrt{۲۵} = ۵$$

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{DC}{AC} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

۱۲۵ گزینه ۲

دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند، زیرا $\hat{A} = \hat{A}$, $\hat{B} = \hat{N}$ درنتیجه $M_۱ = C$ پس نسبت اضلاع برابر است:

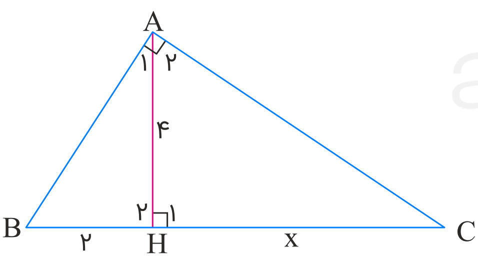


$$\overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow ۴^۲ + ۳^۲ = AC^۲ \Rightarrow AC = ۵$$
$$\frac{AM}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AB} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{MN}{۳} \Rightarrow MN = \frac{۹}{۵} = ۱/۸$$

۱۲۶ گزینه ۳

$$AHM \sim ABC \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{HM}{BC} = \frac{HA}{AB}$$
$$AB = \sqrt{۲۷} = ۳\sqrt{۳} \quad , \quad AM = \frac{۱}{۳}AB = \sqrt{۳}$$
$$AC^۲ = BC^۲ + AB^۲ \Rightarrow AC^۲ = (۲\sqrt{۳})^۲ + (\sqrt{۲۷})^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۱۲ + ۲۷ \Rightarrow AC = \sqrt{۳۹}$$
$$\frac{AM}{AC} = \frac{HM}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳۹}} = \frac{HM}{۲\sqrt{۳}} \Rightarrow HM = \frac{۲ \times ۳}{\sqrt{۳۹}} = \frac{۶}{\sqrt{۳۹}} = \frac{\overset{۲}{\cancel{۶}}\sqrt{۳۹}}{\underset{۱۳}{\cancel{۳۹}}} = \frac{۲\sqrt{۳۹}}{۱۳}$$

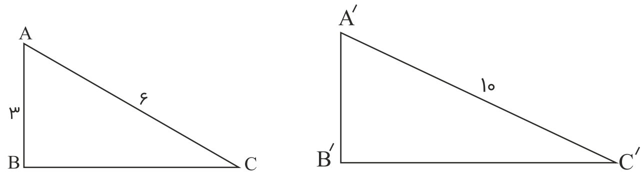
۱۲۷ گزینه ۴



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۹۰^\circ \\ \hat{C} + \hat{A}_۲ = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{A}_۱ = \hat{C} \\ \hat{H}_۲ = \hat{H}_۱ = ۹۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{AHC} \sim \overset{\triangle}{AHB}$$
$$\Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{HC}{AH} \Rightarrow AH^۲ = BH.CH \Rightarrow ۴^۲ = ۲CH \Rightarrow CH = ۸$$

گزینه ۳

دو مثلث را رسم می‌کنیم:



$$\overset{\triangle}{ABC}: AC^{۲} = AB^{۲} + BC^{۲}$$

$$\Rightarrow ۳۶ = ۹ + BC^{۲} \Rightarrow BC^{۲} = ۳۶ - ۹ = ۲۷ \Rightarrow BC = ۳\sqrt{۳}$$

نسبت تشابه: $\dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{۱۰}{۶} = \dfrac{۵}{۳} \Rightarrow A'C' = \dfrac{۵}{۳}AC$

بنابراین: $A'B' = \dfrac{۵}{۳}AB$ و $B'C' = \dfrac{۵}{۳}BC$.

حال x را که طول ضلع $A'B'$ یا $B'C'$ است را به دست می‌آوریم:

$$A'B' = \frac{۵}{۳}AB = \frac{۵}{۳} \times ۳ = ۵$$

$$B'C' = \frac{۵}{۳}BC = \frac{۵}{۳} \times ۳\sqrt{۳} = ۵\sqrt{۳}$$

درنتیجه باتوجه‌به گزینه‌ها $x = ۵\sqrt{۳}$ است.

۱۲۹ گزینه ۲

در لوزی نسبت قطرها با نسبت تشابه دو لوزی برابر است، پس طول قطرهای لوزی بزرگ‌تر به‌صورت زیر است.

محاسبه قطر بزرگ لوزی بزرگ‌تر:

$$\frac{D_۱}{D_۲}=\frac{\sqrt{۲۰۰}}{D_۲}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow D_۲=\frac{۵\times\sqrt{۲۰۰}}{۲}=\frac{۵\times ۱۰\sqrt{۲}}{۲}=۲۵\sqrt{۲}$$

محاسبه قطر کوچک لوزی بزرگ‌تر:

$$\frac{d_۱}{d_۲}=\frac{۱۰}{d_۲}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow d_۲=\frac{۵\times ۱۰}{۲}=۲۵$$

اندازهٔ هر ضلع لوزی بزرگ‌تر (با استفاده از فیثاغورس):

$$\sqrt{(\frac{۲۵\sqrt{۲}}{۲})^۲+(\frac{۲۵}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۶۲۵}{۲}+\frac{۶۲۵}{۴}}=\sqrt{\frac{۳\times ۶۲۵}{۴}}=\frac{۲۵}{۲}\sqrt{۳}$$

محیط لوزی بزرگ‌تر:

$$\frac{۲۵}{۲}\sqrt{۳}\times ۴=۵۰\sqrt{۳}$$

مساحت لوزی بزرگ‌تر:

$$\frac{۲۵\sqrt{۲}\times ۲۵}{۲}=\frac{۶۲۵}{۲}\sqrt{۲}$$

نسبت مساحت به محیط لوزی بزرگ‌تر:

$$\frac{\frac{۶۲۵}{۲}\sqrt{۲}}{۵۰\sqrt{۳}}=\frac{۲۵\sqrt{۲}}{۴\sqrt{۳}}=\frac{۲۵\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}}{۴\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}=\frac{۲۵\sqrt{۶}}{۱۲}$$

۱۳۰ گزینه ۳

اگر طول و عرض مستطیل اول را a و b و طول و عرض مستطیل دوم را x و y در نظر بگیریم داریم:

$$\begin{cases}\frac{a}{x}=\frac{۷}{\sqrt{۷}}\Rightarrow\frac{a^۲}{x^۲}=\frac{۴۹}{۷}=۷\\ \frac{b}{y}=\frac{۷}{\sqrt{۷}}\Rightarrow\frac{b^۲}{y^۲}=\frac{۴۹}{۷}=۷\end{cases}\Rightarrow\frac{a^۲}{x^۲}=\frac{b^۲}{y^۲}=\frac{a^۲+b^۲}{x^۲+y^۲}=۷$$

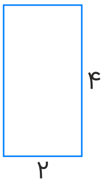
$$\text{نسبت قطرها}=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{\sqrt{x^۲+y^۲}}=\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{x^۲+y^۲}}=\sqrt{۷}$$

۱۳۱ گزینه ۳

چون متشابه هستند، پس نسبت اضلاع برقرار است.

$$\frac{۱۲}{x-۱}=\frac{x+۱}{۲}\Rightarrow(x+۱)(x-۱)=۲۴\Rightarrow x^۲-۱=۲۴$$
$$\Rightarrow x^۲=۲۵\Rightarrow x=۵$$

$$\text{محیط}:(۲+۴)\times ۲=۱۲$$



۱۳۲ گزینه ۴

در دو مستطیل متشابه نسبت طول‌ها به نسبت عرض‌ها برابر است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{۱۰}{x+۳} = \frac{۴}{x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۴(x+۳) = ۱۰x$$

$$\Rightarrow ۴x + ۱۲ = ۱۰x \Rightarrow ۴x - ۱۰x = -۱۲ \Rightarrow -۶x = -۱۲$$

$$\Rightarrow x = \frac{-۱۲}{-۶} \Rightarrow x = ۲$$

طول مستطیل کوچک $= ۲ + ۳ = ۵$

عرض مستطیل کوچک $= ۲$

مساحت مستطیل کوچک $= ۵ \times ۲ = ۱۰$

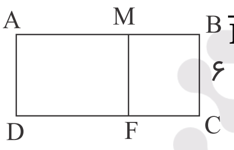
۱۳۳ گزینه ۳

نسبت تشابه را r، طول و عرض عکس اصلی را $a_۱$ و $b_۱$ و طول و عرض عکس بزرگ‌شده را $a_۲$ و $b_۲$ در نظر بگیرید.

$$r = \frac{a_۱}{a_۲} = \frac{b_۱}{b_۲} \Rightarrow \frac{۶}{۴} = \frac{b_۱}{۴+۱۲} \Rightarrow b_۱ = \frac{۶ \times ۱۶}{۴} = ۲۴$$

بنابراین به طول عکس ۱۸ سانتی‌متر اضافه شده است.

۱۳۴ گزینه ۲



$$\frac{\text{طول } ABCD}{\text{طول } MBCF} = \frac{\text{عرض } ABCD}{\text{عرض } MBCF} \Rightarrow \frac{۱۸}{۶} = \frac{۶}{FC} \Rightarrow FC = \frac{۳۶}{۱۸} = ۲$$

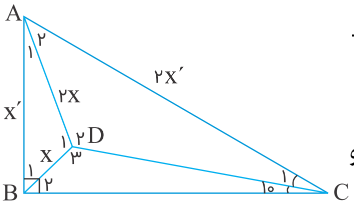
۱۳۵ گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} ABCD \sim BCEF \\ \overline{AO} = \overline{BO} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تعریف}} \left.\begin{array}{l} \overline{CE} = ۳\overline{BC} \\ \overline{BC} = \overline{AD} = ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{CE} = ۳ \times ۳ = ۹$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{ADEF} = ۳ \times \overline{DE} = ۳(۱+۹) = ۳ \times ۱۰ \\ S_{BCEF} = ۳ \times \overline{CE} = ۳ \times ۹ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_{ADEF}}{S_{BCEF}} = \frac{۳ \times ۱۰}{۳ \times ۹} = \frac{۱۰}{۹}$$

۱۳۶ گزینه ۳

چون دو مثلث ADB و ADC متشابه‌اند، پس:



$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{AB}=۲$$

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰ درجه نصف وتر است.

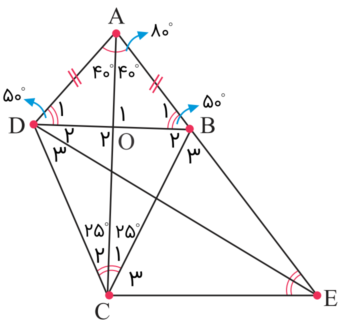
باتوجه‌به نکتهٔ فوق می‌توان نتیجه گرفت که $\hat{C}=۳۰^\circ$، بنابراین $\hat{C}_۱=۲۰^\circ$ است. چون دو مثلث ADC و ADB متشابه‌اند، نتیجه می‌شود که $\hat{A}_۱=۲۰^\circ$. ازطرفی $\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۶۰^\circ$، پس $A_۲=۴۰^\circ$.

$$\overset{\Delta}{ADC}:\ \hat{D}_۲+\hat{A}_۲+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{D}_۲+۴۰^\circ+۲۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{D}_۲=۱۲۰^\circ\xrightarrow{\hat{D}_۱=\hat{D}_۲}\hat{D}_۱=۱۲۰^\circ$$

$$\hat{A}_۱+\hat{D}_۱+\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ\Rightarrow۲۰+۱۲۰^\circ+\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{B}_۱=۴۰^\circ\xrightarrow{\hat{B}_۱+\hat{B}_۲=۹۰^\circ}\hat{B}_۲=۵۰^\circ$$

۱۳۷ گزینه ۴

باتوجه‌به مفروضات مسئله، شکل زیر را رسم می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ABD}:AB=AD\Rightarrow\hat{B}_۱=\hat{D}_۱=\frac{۱۸۰-۸۰}{۲}=۵۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{AOB}:\hat{O}_۱=۱۸۰-۴۰-۵۰=۹۰^\circ\Rightarrow\hat{O}_۲=۹۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ODC}:\hat{D}_۲+\hat{D}_۳=۱۸۰-۹۰-۲۵=۶۵^\circ\quad(*)$$

$\hat{B}_۲=۱۸۰-۶۵-۵۰=۶۵^\circ\Rightarrow$ $\overset{\Delta}{DBC}$ متساوی‌الساقین است

مثلث‌های BDC و BCE متشابه هستند، بنابراین $\hat{B}_۳=۶۵^\circ$ است. درنتیجه:

$$\hat{B}_۱+\hat{B}_۲+\hat{B}_۳=۵۰+۶۵+۶۵=۱۸۰$$

بنابراین سه نقطهٔ A و B و E روی یک خط قرار دارند. پس:

$$\overset{\Delta}{AED}:\hat{D}_۱+\hat{D}_۲=۸۰^\circ\Rightarrow\hat{D}_۲=۸۰-۵۰=۳۰^\circ$$

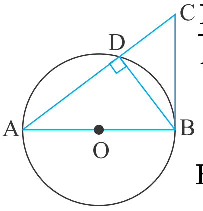
طبق (*) داریم:

$$D_۲+D_۳=۶۵^\circ\Rightarrow D_۳=۶۵-۳۰=۳۵^\circ$$

Bekrinoo academy

۱۳۸ گزینه ۱

دو مثلث ABC و BCD متشابه‌اند، پس:



$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow BC^{۲} = DC.AC$$

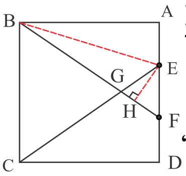
فرض می‌کنیم $DC = x$ باشد، پس $AC = ۳x$ است. بنابراین:

$$BC^{۲} = DC.AC = x \times ۳x = ۳x^{۲} \Rightarrow BC = x\sqrt{۳}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{x\sqrt{۳}}{x} = \sqrt{۳}$$

۱۳۹ گزینه ۲

در شکل، مثلث‌های $G\overset{\Delta}{E}F$ و $B\overset{\Delta}{G}C$ متشابه هستند (چون زاویه‌های آن‌ها نظیر به نظیر برابرند) پس اضلاع آن‌ها متناسب هستند؛ بنابراین:



$$\frac{BC}{EF} = \frac{BG}{GF} \Rightarrow \frac{a}{\frac{a}{۳}} = \frac{BG}{GF} \Rightarrow \frac{BG}{GF} = \frac{۳}{۱}$$

در دو مثلث $B\overset{\Delta}{G}E$ و $E\overset{\Delta}{G}F$ اگر BG و GF قاعده فرض شوند، ارتفاع هر دو به‌اندازهٔ EH است. وقتی ارتفاع دو مثلث برابر است، نسبت مساحت‌های آن‌ها به‌اندازه نسبت قاعده‌ها است، پس:

$$\frac{S_{BEG}}{S_{EGF}} = \frac{۳}{۱} = ۳$$

Bekrinoo academy