۱
گزینه ۴

عبارت‌های $\frac{\sqrt{x^5}}{5}$، $\sqrt{x^2}$ و $|x+1|$ گویا نیستند.
در عبارت $|x+1|$ چون متغیر داخل قدر مطلق است، پس عبارت چندجمله‌ای نیست. بنابراین گویا نمی‌باشد. عبارت $\sqrt{x^2}$ با عبارت $|x|$ برابر است، پس عبارت چندجمله‌ای نیست. بنابراین گویا نمی‌باشد. در عبارت $\frac{\sqrt{x^5}}{5}$ چون متغیر زیر رادیکال است، صورت کسر چند جمله‌ای نیست. بنابراین گویا نمی‌باشد.
همچنین در عبارت $a^2 - x$ چون بعد از ساده شدن، متغیر از زیر رادیکال بیرون می‌آید، $(a-\sqrt{x})(a+\sqrt{x}) = a^2 - x$ پس گویا است. سایر عبارت‌ها نیز گویا هستند.

۲
گزینه ۲

$$B = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{-\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}}$$

برای گویا کردن صورت کافی است که صورت در $\sqrt{y}$ و برای گویا کردن مخرج، مخرج در $x-\sqrt{xy}$ ضرب شود، درنتیجه در کل باید در $\frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}}$ ضرب شود.

۳
گزینه ۴

چون همواره $(2x-1)^2 \geq 0$ بنابراین $((2x-1)^2)^3 + 4 > 0$، پس مخرج کسر هیچ‌گاه برابر با صفر نمی‌شود.

۴
گزینه ۲

هر عبارت گویا به ازای مقادیری که مخرج را صفر کنند، تعریف نشده است.

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

۵
گزینه ۱

هرگاه مقداری مخرج را صفر کند به‌ازای آن عبارت تعریف نشده است:

$$(2x-1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (2x-1+2)(2x-1-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ 2x-3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

مجموع مقادیر : $\frac{3}{2} + (-\frac{1}{2}) = 1$

۶ گزینه ۱

به ازای ریشه‌های مخرج کسر نامعین است، پس باید ریشه‌های مخرج را به دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}(۴x-x^۲)\underbrace{(x^۲+۱)}_{>۰}=۰\Rightarrow x(۲-x)(۲+x)=۰\Rightarrow x=۰,\ ۲,\ -۲\\ x^۲+۳x+۲=۰\Rightarrow (x+۱)(x+۲)=۰\Rightarrow x=-۱,\ -۲\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x=\{-۲,\ -۱,\ ۰,\ ۲\}$$

۷ گزینه ۲

$$\frac{x(x+۱)}{(x+۱)(x^۲+۶x+۹)(x^۲+۱)}=\frac{x(x+۱)}{(x+۱)(x+۳)^۲(x^۲+۱)}$$

$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱$$

$$x+۳=۰\Rightarrow x=-۳$$

$$x^۲+۱=۰\Rightarrow x^۲=-۱$$

به‌ازای $x=-۱$ و $x=-۳$ تعریف نشده است.

۸ گزینه ۳

$$C=\frac{x-۱}{۵x^۲+۲\sqrt{۵}x+۱}\times\frac{۱-\sqrt{۵}x}{x^۳-۵x}$$

$$۵x^۲+۲\sqrt{۵}x+۱=(\sqrt{۵}x)^۲+۲\sqrt{۵}x+۱=(\sqrt{۵}x+۱)^۲=۰$$

$$\Rightarrow \sqrt{۵}x+۱=۰\Rightarrow x=\frac{-۱}{\sqrt{۵}}=\frac{-\sqrt{۵}}{۵}$$

$$x^۳-۵x=۰\Rightarrow x(x^۲-۵)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x^۲-۵=۰\Rightarrow x^۲=۵\Rightarrow x=+\sqrt{۵},\ -\sqrt{۵}\end{cases}$$

$$۱-\sqrt{۵}x=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

۹ گزینه ۱

اگر عبارت گویای $\frac{x-۴}{mx^۳-nx^۲+۵}$ به‌ازای $x=-۱$ تعریف نشده باشد، پس $x=-۱$ ریشهٔ مخرج است، بنابراین به‌ازای $x=-۱$ عبارت مخرج صفر می‌شود. داریم:

$$m(-۱)^۳-n(-۱)^۲+۵=۰\Rightarrow -m-n+۵=۰\Rightarrow -(m+n)=-۵$$
$$\Rightarrow m+n=+۵$$

۱۰ گزینه ۲

$$\frac{۴a-۲}{۱-۲a}=\frac{۲(۲a-۱)}{۱-۲a}=\frac{۲\overset{۱}{\cancel{(۲a-۱)}}}{-\underset{۱}{\cancel{(۲a-۱)}}}=\frac{۲}{-۱}=-۲$$

$$\frac{۶-۴x}{-۲x+۳}=\frac{۲\overset{۱}{\cancel{(۳-۲x)}}}{\underset{۱}{\cancel{(۳-۲x)}}}=۲$$

۱۱ گزینه ۱

$$\frac{۳a^{۱۲}-۶a^{۳۰}}{۲a^{۷}-۴a^{۲۵}}=\frac{۳a^{۱۲}(۱-۲a^{۱۸})}{۲a^{۷}(۱-۲a^{۱۸})}=\frac{۳}{۲}a^{۵}$$

۱۲ گزینه ۴

$$\frac{۲x^{۲}-۸x}{x^{۲}-۱۶}=\frac{۲x(x-۴)}{(x-۴)(x+۴)}=\frac{۲x}{x+۴}$$

۱۳ گزینه ۱

$$\frac{x^{۳}-۴x}{x^{۳}-۵x^{۲}+۶x}=\frac{x(x^{۲}-۴)}{x(x^{۲}-۵x+۶)}=\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)(x-۳)}=\frac{x+۲}{x-۳}$$

۱۴ گزینه ۱

اتحاد مجموع دوجمله‌ای:

$$\frac{x^{۲}-۲xy+y^{۲}-x+y}{x^{۲}-xy-x}=\frac{(x-y)^{۲}-(x-y)}{x(x-y-۱)}=\frac{(x-y)\overset{۱}{\cancel{(x-y-۱)}}}{x\underset{۱}{\cancel{(x-y-۱)}}}=\frac{x-y}{x}$$

۱۵ گزینه ۴

$$\frac{x^{۱۰}-b^{۱۰}}{b^{۱۰}-x^{۱۰}}\times\frac{x^{۲}-۲x+۱}{۲x-x^{۲}-۱}=\frac{-(b^{۱۰}-x^{۱۰})}{b^{۱۰}-x^{۱۰}}\times\frac{(x-۱)^{۲}}{-(x-۱)^{۲}}=(-۱)\times(-۱)=۱$$

۱۶ گزینه ۳

$$\frac{a^{۲}-a}{a^{۲}-۵a+۶}\times\frac{a-۲}{a-۱}=\frac{a(a-۱)}{(a-۲)(a-۳)}\times\frac{a-۲}{a-۱}=\frac{a}{a-۳}$$

۱۷ گزینه ۴

$$\frac{x^{۲}-۲x}{x^{۲}-۴}\div\frac{x^{۲}-x}{x^{۲}-۳x+۲}=\frac{x(x-۲)}{(x-۲)(x+۲)}\times\frac{(x-۱)(x-۲)}{x(x-۱)}=\frac{x-۲}{x+۲}$$

۱۸ گزینه ۱

$$\frac{۲x^۲-x}{۴x^۲-۸x+۳}\div\frac{x^۲}{۳-۲x}=\frac{۲x^۲-x}{۴x^۲-۸x+۳}\times\frac{۳-۲x}{x^۲}$$

$$=\frac{x(۲x-۱)}{(۲x-۳)(۲x-۱)}\times\frac{-(۲x-۳)}{x^۲}=\frac{-x}{x^۲}=\frac{-۱}{x}$$

۱۹ گزینه ۳

$$C=(۲xy+۳y^۲)^{-۲}\div\frac{۴x^۲y-۱۲xy^۲+۹y^۳}{۴x^۲-۹y^۲}=\frac{۱}{(۲xy+۳y^۲)^۲}\times\frac{۴x^۲-۹y^۲}{۴x^۲y-۱۲xy^۲+۹y^۳}$$

$$=\frac{۱}{(y(۲x+۳y))^۲}\times\frac{(۲x-۳y)(۲x+۳y)}{y(۴x^۲-۱۲xy+۹y^۲)}$$

$$=\frac{۱}{y^۲(۲x+۳y)^۲}\times\frac{(۲x-۳y)(۲x+۳y)}{y(۲x-۳y)^۲}=\frac{۱}{y^۳(۲x+۳y)(۲x-۳y)}=\frac{۱}{y^۳(۴x^۲-۹y^۲)}$$

۲۰ گزینه ۳

$۲x-۳$ و $۳-۲x$ قرینهٔ هم هستند. $\Rightarrow \frac{۲x-۳}{۳-۲x}=-۱$

$۳a+۲$ و $۲+۳a$ باهم برابرند. $\Rightarrow \frac{۳a+۲}{۲+۳a}=۱$

$$\Rightarrow -۱-۱=-۲$$

۲۱ گزینه ۴

مخرج‌ها را تجزیه کرده و بین آن‌ها مخرج‌مشترک می‌گیریم.

$$\frac{۲-n}{n^۲-۳n+۲}+\frac{۲}{n+۲}=\frac{(۲-n)}{(n-۱)(n-۲)}+\frac{۲}{n+۲}$$

$$=\frac{-\overset{۱}{\cancel{(n-۲)}}}{(n-۱)\underset{۱}{\cancel{(n-۲)}}}+\frac{۲}{n+۲}=\frac{-۱}{n-۱}+\frac{۲}{n+۲}=\frac{-(n+۲)+۲(n-۱)}{(n-۱)(n+۲)}$$

$$=\frac{-n-۲+۲n-۲}{(n-۱)(n+۲)}=\frac{n-۴}{n^۲+n-۲}$$

۲۲ گزینه ۲

$$\frac{x^۳+۳x^۲-۱۰x}{x^۳-۴x}-\frac{۵}{x+۲}=\frac{\cancel{x}(x^۲+۳x-۱۰)}{\cancel{x}(x^۲-۴)}-\frac{۵}{x+۲}$$

$$=\frac{x^۲+۳x-۱۰}{(x-۲)(x+۲)}-\frac{۵(x-۲)}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{x^۲+۳x\cancel{-۱۰}-۵x\cancel{+۱۰}}{(x-۲)(x+۲)}$$

$$=\frac{x^۲-۲x}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{x(x-۲)}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{x}{x+۲}$$

۲۳ گزینه ۴

$$\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}+2=\frac{(1+x)^2+(1-x)^2+2\left(1-x^2\right)}{(1-x)\,(1+x)}=\frac{2x^2+2+2-2x^2}{1-x^2}=\frac{4}{1-x^2}$$

۲۴ گزینه ۳

$$\left(\frac{xy+1}{xy-1}-\frac{xy-1}{xy+1}\right)\div\left(\frac{xy+1}{xy-1}+\frac{xy-1}{xy+1}-2\right)$$

$$=\left(\frac{(xy+1)^2-(xy-1)^2}{(xy-1)(xy+1)}\right)\div\left(\frac{(xy+1)^2+(xy-1)^2-2(xy-1)(xy+1)}{(xy-1)(xy+1)}\right)$$

$$=\frac{\cancel{x^2y^2}+2xy\cancel{+1}-\cancel{x^2y^2}+2xy\cancel{-1}}{(xy-1)(xy+1)}\times\frac{(xy-1)(xy+1)}{\cancel{x^2y^2}+\cancel{2xy}+1+\cancel{x^2y^2}-\cancel{2xy}+1-\cancel{2x^2y^2}+2}$$

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}xy}{\underset{1}{(\cancel{xy-1})}\underset{1}{(\cancel{xy+1})}}\times\frac{\overset{1}{(\cancel{xy-1})}\overset{1}{(\cancel{xy+1})}}{\underset{1}{\cancel{4}}}=xy$$

۲۵ گزینه ۳

$$\frac{\frac{1}{a-2}-\frac{2}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{2}{a-2}}=\frac{\frac{a-2(a-2)}{(a-2)a}}{\frac{a-2-2a}{a(a-2)}}=\frac{a-2a+4}{-2-a}$$

$$\text{قرینه}:\ -\left(\frac{-a+4}{-2-a}\right)=\frac{4-a}{a+2}$$

۲۶ گزینه ۳

$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{1-\frac{a^2}{a^2-b^2}}=\frac{\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-b^2}}{\frac{a^2-b^2-a^2}{a^2-b^2}}=\frac{a^2+b^2}{-b^2}=-\frac{a^2+b^2}{b^2}$$

۲۷ گزینه ۱

$$\text{صورت}:\ \frac{2}{a-1}-\frac{4}{a^2-1}=\frac{2}{(a-1)}-\frac{4}{(a-1)(a+1)}$$

$$=\frac{2(a+1)-4}{(a-1)(a+1)}=\frac{2a-2}{a^2-1}$$

$$\text{مخرج}:\ \frac{3}{a+1}-\frac{a+1}{a^2-1}=\frac{3}{a+1}-\frac{a+1}{(a-1)(a+1)}$$

$$=\frac{3(a-1)-(a+1)}{(a-1)(a+1)}=\frac{2a-4}{a^2-1}$$

$$\Rightarrow \text{عبارت موردنظر}=\frac{\frac{2a-2}{\cancel{a^2-1}}}{\frac{2a-4}{\cancel{a^2-1}}}=\frac{2a-2}{2a-4}=\frac{a-1}{a-2}$$

۲۸ گزینه ۲

$$\frac{\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}}{\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\left(1-\frac{x}{x+1}\right)}=\frac{\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)(1+x)}}{\left(\frac{1+x-1+x}{1-x}\right)\left(\frac{x+1-x}{1+x}\right)}$$

$$=\frac{\frac{\cancel{1}+2x+\cancel{x^2}-\cancel{1}-\cancel{x^2}+2x}{(1-x)(1+x)}}{\left(\frac{2x}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1+x}\right)}=\frac{\frac{4x}{(1-x)(1+x)}}{\frac{2x}{(1-x)(1+x)}}=\frac{4x}{2x}=2$$

۲۹ گزینه ۴

$$\square=\frac{(x^2-4)(x^2+x)}{x^2+2x}=\frac{(x-2)(x+2)x(x+1)}{x(x+2)}$$
$$=(x-2)(x+1)=x^2-x-2$$

۳۰ گزینه ۳

عبارت سمت چپ را تجزیه و ساده می‌کنیم. داریم:

$$\frac{x^4-4x^2}{x^3-5x^2+6x}=\frac{x^2(x^2-4)}{x(x^2-5x+6)}=\frac{\cancel{x^2}^{\,x}\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x}\cancel{(x-2)}(x-3)}=\frac{x(x+2)}{x-3}$$
$$\Rightarrow\frac{x\cancel{(x+2)}}{x-3}=\frac{\cancel{(x+2)}}{A}\Rightarrow\frac{x}{x-3}=\frac{1}{A}\Rightarrow A=\frac{x-3}{x}=1-\frac{3}{x}$$

۳۱ گزینه ۲

$$\frac{ax^2+ax}{2x^3+12x^2}\div\frac{x^2-1}{x^3+5x^2-6x}=\frac{ax(x+1)}{2x^2(x+6)}\times\frac{x(x^2+5x-6)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{a\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{2\cancel{x^2}\cancel{(x+6)}}\times\frac{\cancel{x}\cancel{(x+6)}\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}=\frac{a}{2}=3\Rightarrow a=6$$

۳۲ گزینه ۱

$$\frac{-7x+16}{x^2-4x}-\frac{3}{4-x}=\frac{-7x+16}{x(x-4)}-\frac{3}{-(x-4)}=\frac{-7x+16}{x(x-4)}+\frac{3x}{x(x-4)}$$
$$=\frac{-4x+16}{x(x-4)}=\frac{-4(x-4)}{x(x-4)}=\frac{-4}{x}\Rightarrow M=-4$$

۳۳ گزینه ۴

حاصل صورت برابر است با:

$$(۱-\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۳})\dots\underbrace{(۱-\frac{۱}{x-۱})}_{\frac{x-۱-۱}{x-۱}=\frac{x-۲}{x-۱}} = \frac{۱}{\cancel{۲}} \times \frac{\cancel{۲}}{\cancel{۳}} \times \dots \times \frac{\cancel{x-۲}}{x-۱} = \frac{۱}{x-۱}$$

حاصل مخرج برابر است با:

$$(۱+\frac{۱}{۲})(۱+\frac{۱}{۳})\dots\underbrace{(۱+\frac{۱}{x-۱})}_{\frac{x-۱+۱}{x-۱}=\frac{x}{x-۱}} = \frac{\cancel{۳}}{۲} \times \frac{\cancel{۴}}{\cancel{۳}} \times \dots \times \frac{x}{\cancel{x-۱}} = \frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{x-۱}}{\frac{x}{۲}} = \frac{۱}{۱۵} \Rightarrow \frac{۲}{x(x-۱)} = \frac{۱}{۱۵}$$

$$\Rightarrow ۳۰ = x(x-۱) = ۶ \times ۵ \Rightarrow x = ۶$$

۳۴ گزینه ۱

$$\frac{۱+\frac{۱}{x-۱}+\frac{a}{x^۲-۱}}{۱+\frac{۲}{x-۱}+\frac{۱}{x+۱}} = \frac{۱+\frac{۱}{x-۱}+\frac{a}{(x-۱)(x+۱)}}{۱+\frac{۲}{x-۱}+\frac{۱}{x+۱}}$$

$$= \frac{\frac{(x-۱)(x+۱)+(x+۱)+a}{\cancel{(x-۱)(x+۱)}}}{\frac{(x-۱)(x+۱)+۲(x+۱)+(x-۱)}{\cancel{(x-۱)(x+۱)}}} = \frac{x^۲-۱+x+۱+a}{x^۲-۱+۲x+۲+x-۱}$$

$$= \frac{x^۲+x+a}{x^۲+۳x} = \frac{x^۲+x+a}{x(x+۳)}$$

حال باید کسر $\frac{x^۲+x+a}{x(x+۳)}$ برابر با $\frac{(x-۲)}{x}$ باشد، داریم:

$$\frac{x^۲+x+a}{x(x+۳)} = \frac{(x-۲)}{x} = \frac{(x-۲)(x+۳)}{x(x+۳)} = \frac{x^۲+x-۶}{x(x+۳)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲+x+a}{x(x+۳)} = \frac{x^۲+x-۶}{x(x+۳)} \Rightarrow a = -۶$$

۳۵ گزینه ۱

در تقسیم چندجمله‌ای درجه ۵ بر یک چندجمله‌ای درجه ۳، باقی‌مانده حداکثر از درجه ۲ است، پس به‌صورت $ax^۲+bx+c$ می‌تواند باشد که در صورت غیرصفر بودن، a، b و c حداکثر سه‌جمله‌ای است.

۳۶ گزینه ۲

نکته:

۱) بزرگ‌ترین درجهٔ مقسوم‌علیه + بزرگ‌ترین درجهٔ خارج قسمت = بزرگ‌ترین درجهٔ مقسوم

۲) در تقسیم چندجمله‌ای‌ها تا زمانی تقسیم را ادامه می‌دهیم که درجهٔ باقی‌مانده از درجهٔ مقسوم‌علیه کمتر باشد.

باتوجه‌به نکتهٔ (۱) گزینه‌های "۱" و "۳" حذف می‌شوند. باتوجه‌به نکتهٔ (۲) نیز گزینهٔ "۴" حذف می‌شود. بنابراین گزینهٔ "۲" صحیح است.

۳۷ گزینه ۴

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۳ - x^۲ + ۳x + ۷ & x^۲ - ۱ \\ \underline{-۲x^۳ + ۲x} & \overline{۲x - ۱} \\ -x^۲ + ۵x + ۷ & \\ \underline{+x^۲ - ۱} & \\ ۵x + ۶ & \end{array}$$

خارج‌قسمت $۲x - ۱$ است.

۳۸ گزینه ۱

$$\begin{array}{l|l} ۴x^۳ + ۸x^۲ - ۷x & ۲x + ۱ \\ \underline{-۴x^۳ - ۲x^۲} & \overline{۲x^۲ + ۳x - ۵} \\ ۶x^۲ - ۷x & \\ \underline{-۶x^۲ - ۳x} & \\ -۱۰x & \\ \underline{۱۰x + ۵} & \\ ۵ & \end{array}$$

مقدار عددی خارج قسمت را به‌ازای $x = -۱$ به دست می‌آوریم:

$$۲(-۱)^۲ + ۳(-۱) - ۵ = ۲ - ۸ = -۶$$

۳۹ گزینه ۴

$$(x^۲ + \overset{\text{جمع دو عدد}}{\overset{\uparrow}{۲x}} - \underset{\text{ضرب دو عدد}}{\underset{\downarrow}{۳۵}})(x^۲ - \overset{\text{جمع دو عدد}}{\overset{\uparrow}{۲x}} - \underset{\text{ضرب دو عدد}}{\underset{\downarrow}{۳۵}})$$

$$= (x + ۷)(x - ۵)(x - ۷)(x + ۵) = (x^۲ - ۴۹)(x^۲ - ۲۵)$$

$$\Rightarrow \frac{(x^۲ - ۴۹)\overset{۱}{\cancel{(x^۲ - ۲۵)}}}{\underset{۱}{\cancel{(x^۲ - ۲۵)}}} = x^۲ - ۴۹$$

۴۰ گزینه ۴

تقسیم زیر را انجام می‌دهیم تا به $(x - a)(x - b)$ برسیم.

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۴ - ۳x^۳ - ۱۶x^۲ + ۳۱x - ۶ & ۲x^۲ - ۵x + ۱ \\ \underline{-(۲x^۴ - ۵x^۳ + x^۲)} & \overline{x^۲ + x - ۶} \\ ۲x^۳ - ۱۷x^۲ + ۳۱x - ۶ & \\ \underline{-(۲x^۳ - ۵x^۲ + x)} & \\ -۱۲x^۲ + ۳۰x - ۶ & \\ \underline{-(-۱۲x^۲ + ۳۰x - ۶)} & \\ ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow (x - a)(x - b) = x^۲ + x - ۶ = (x - ۲)(x + ۳) \Rightarrow a = ۲\ ,\ b = -۳$$

$$\Rightarrow b^a = (-۳)^۲ = ۹$$

۴۱ گزینه ۴

نکته: باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ برابر است با $P(a)$.

برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای بر $x-۱$ باید ریشهٔ x؛ $x-۱=۰$ یعنی $x=۱$ را در چندجمله‌ای بگذاریم:

$$P(X)=x^{۴}-۶x^{۲}+ax-۲\Rightarrow P(۱)=۱^{۴}-۶(۱)+a(۱)-۲=۱-۶+a-۲=a-۷=۲\Rightarrow a=۹$$

۴۲ گزینه ۱

یک روش آن است که هر دو عبارت را بر $x-۱$ تقسیم کنید و باقی‌مانده‌ها را باهم مساوی قرار دهید تا به پاسخ برسید. روش دیگر که برای حل این مسئله پیشنهاد می‌شود به‌صورت زیر است:

۱- وقتی مقسوم‌علیه از درجه ۱ است ریشهٔ آن را به دست آورید ($x=۱$).

۲- مقدار عددی مقسوم را به ازای $x=۱$ به دست آورید که برابر همان باقی‌مانده است.

پس باقی‌ماندهٔ $۲۰x^{۳}+۲۳x^{۲}-۱۰x+a$ برابر است با:

$$۲۰(۱)^{۳}+۲۳(۱)^{۲}-۱۰(۱)+a=۳۳+a$$

و باقی‌ماندهٔ $۲x^{۲}-۹x+۹$ برابر است با:

$$۲(۱)^{۲}-۹(۱)+۹=۲$$

چون باقی‌مانده‌ها طبق فرض مسئله باهم برابر هستند، پس داریم:

$$۳۳+a=۲\Rightarrow a=-۳۱$$

۴۳ گزینه ۴

$$\left.\begin{matrix}۳x^{۴}+ax^{۲}+b\\ x=-۱\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۳+a+b=۱$$

$$\left.\begin{matrix}۳x^{۴}+ax^{۲}+b\\ x=۲\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۴۸+۴a+b=-۲$$

$$-\begin{cases}a+b=-۲\\ ۴a+b=-۵۰\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}-a-b=۲\\ ۴a+b=-۵۰\end{cases}$$

$$۳a=-۴۸\Rightarrow a=-۱۶\quad,\quad b=۱۴$$

$$\Rightarrow (a-b)^{-۱}=(-۱۶-۱۴)^{-۱}=-\frac{۱}{۳۰}$$

۴۴ گزینه ۳

$$\begin{array}{l|l}
۲x^{۳}-۷x^{۲}+۵ & x^{۲}-۲\\ \cline{2-2}
\underline{-۲x^{۳}+۴x} & ۲x-۷\\
-۷x^{۲}+۴x+۵ & \\
\underline{+۷x^{۲}-۱۴} & \\
۴x-۹ &
\end{array}$$

$$\Rightarrow ۴x-۹=ax+b\Rightarrow a=۴,b=-۹\Rightarrow a+b=۴-۹=-۵$$

۴۵ گزینه ۳

$x^۳ + ۵x - ۲$ را بر $x^۲ + x - ۱$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^۳ + ۵x - ۲ & x^۲ + x - ۱ \\ \cline{2-2} \underline{-(x^۳ + x^۲ - x)} & x - ۱ \\ -x^۲ + x + ۵x - ۲ & \\ \underline{-(-x^۲ - x + ۱)} & \\ ۷x - ۳ & \end{array}$$

$$۷x - ۳ = ax + b \Rightarrow a = ۷\,,\, b = -۳ \Rightarrow ۴a - b = ۴(۷) - (-۳) = ۳۱$$

۴۶ گزینه ۱

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^۴} + \cancel{x^۲} + a & x^۲ + x + ۱ \\ \cline{2-2} \underline{-\cancel{x^۴} - x^۳ - \cancel{x^۲}} & x^۲ - x + ۱ \\ -\cancel{x^۳} + a & \\ \underline{+\cancel{x^۳} + x^۲ + x} & \\ +\cancel{x^۲} + \cancel{x} + a & \\ \underline{-\cancel{x^۲} - \cancel{x} - ۱} & \\ a - ۱ & \end{array}$$

وقتی بخش‌پذیر است که باقی‌مانده صفر شود.

$$a - ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

۴۷ گزینه ۱

خارج‌قسمت را $Q(x)$ و باقی‌مانده را $R(x)$ در نظر بگیرید، آنگاه داریم:

$$(x^۲ - ۱)Q(x) + R(x) = x^{۱۳۹۵} + x^۲ + ۷$$

این معادله به ازای همه مقادیر x برقرار است. یک راه‌حل سریع برای حل این مسئله آن است که معادله فوق را به ازای ریشه‌های خارج‌قسمت یعنی $+۱$ و -۱ بررسی کنیم. اگر $x = ۱$ باشد، داریم:

$$(۱^۲ - ۱)Q(x) + R(x) = ۱^{۱۳۹۵} + ۱^۲ + ۷ \Rightarrow R(۱) = ۹$$

اگر $x = -۱$ باشد، داریم:

$$((-۱)^۲ - ۱)Q(x) + R(x) = (-۱)^{۱۳۹۵} + (-۱)^۲ + ۷ \Rightarrow R(-۱) = ۷$$

از بین گزینه‌ها فقط $R(x) = x + ۸$ به ازای $x = ۱$ برابر ۹ و به ازای $x = -۱$ برابر ۷ است.

۴۸

گزینه ۱

ریشه‌های مقسوم‌علیه (عددی که با قرار گرفتن به جای x در مقسوم‌علیه حاصل صفر می‌شود) را به دست می‌آوریم:

$$x^{۲} - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$$

با قرار دادن ریشه‌های مقسوم علیه در مقسوم باقی‌مانده را به دست می‌آوریم، اما باتوجه‌به زوج بودن توان تمام xها در مقسوم فرقی نمی‌کند ۱ یا ۱- جایگذاری شود، پس عدد ۱ را به جای x در مقسوم جایگذاری می‌کنیم، داریم:

$$\underbrace{۱^{۱۰۰} - ۱^{۹۸} + ۱^{۹۶} + \dots + ۱^{۴} - ۱^{۲}}_{\text{۵۰ تا}} + ۱ = \underbrace{۱ - ۱ + ۱ + \dots + ۱ - ۱}_{۰} + ۱ = ۰ + ۱ = ۱$$

پس باقی‌مانده برابر با ۱ است.

۴۹

گزینه ۴

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^{۵}} - ۳x^{۳} + \cancel{۲x^{۲}} + ۸x & x^{۳} + ۲ \\ \hline -\cancel{x^{۵}} - \cancel{۲x^{۲}} & x^{۲} - ۳ \\ \quad -\cancel{۳x^{۳}} + ۸x & \\ \quad \cancel{۳x^{۳}} + ۶ & \\ \quad ۸x + ۶ & \end{array}$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر با $۸x + ۶$ است.

۵۰

گزینه ۲

مقسوم را بر مقسوم‌علیه تقسیم کرده و باقی‌مانده را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{array}{l|l} ۲۰x^{۳} + ۲۳x^{۲} - ۱۰x + a & ۴x + ۳ \\ \hline -۲۰x^{۳} - ۱۵x^{۲} & ۵x^{۲} + ۲x - ۴ \\ ۸x^{۲} - ۱۰x + a & \\ -۸x^{۲} - ۶x & \\ -۱۶x + a & \\ +۱۶x + ۱۲ & \\ a + ۱۲ \Rightarrow a + ۱۲ = ۰ \Rightarrow a = -۱۲ & \end{array}$$

۵۱

گزینه ۴

$$\begin{array}{l|l} ۱۲x^{۴} + ۳۱x^{۲} + a & ۳x^{۲} + ۴ \\ \hline -۱۲x^{۴} - ۱۶x^{۲} & ۴x^{۲} + ۵ \\ ۱۵x^{۲} + a & \\ -۱۵x^{۲} - ۲۰ & \\ a - ۲۰ \Rightarrow a - ۲۰ = ۰ \Rightarrow a = ۲۰ & \end{array}$$

۵۲ گزینه ۲

باید ریشه‌های $x^2 - 2x - 3$ در چندجمله‌ای داده‌شده صدق کند و چندجمله‌ای به ازای آن‌ها برابر با صفر باشد، داریم:

$$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$x = -1 : x^4 + ax + b = (-1)^4 + a(-1) + b = -a + b + 1 = 0 \Rightarrow -a + b = -1 \quad (1)$$

$$x = 3 : (3)^4 + a(3) + b = 81 + 3a + b = 0 \Rightarrow 3a + b = -81 \quad (2)$$

$$(-1)\times \begin{cases} -a + b = -1 \\ 3a + b = -81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = -1 \\ -3a - b = 81 \end{cases} \Rightarrow a = -20 , b = -21$$

۵۳ گزینه ۴

$$A = ax + b \Rightarrow 5x^3 + ax + b + 1 \quad \Big| \begin{array}{l} x^2 + 2x - 1 \\ \hline 5x - 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{-5x^3 - 10x^2 + 5x} \\ \cancel{-10x^2} + (a+5)x + b + 1 \\ \underline{\cancel{+10x^2} + 20x - 10} \\ (25 + a)x + b - 9 \end{array}$$

$$(25 + a)x + b - 9 = 0 \Rightarrow a = -25 \ , \ b = 9$$
$$\Rightarrow A = -25x + 9$$

۵۴ گزینه ۴

کافی است چندجمله‌ای $a^5 + ab^4$ را تجزیه کنیم.

$$a^5 + ab^4 = a(a^4 + b^4) = a((a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2) = a(a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)$$

* دقت کنید که گزینهٔ (۳) همان $a(a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)$ است.

۵۵ گزینه ۲

چون $2x^2 - x - 1$ یکی از عامل‌های عبارت $10x^3 + x^2 - 8x - 3$ است، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{array}{r|l} 10x^3 + x^2 - 8x - 3 & 2x^2 - x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-(10x^3 - 5x^2 - 5x)} & 5x + 3 \\ 6x^2 - 3x - 3 & \\ \underline{-(6x^2 - 3x - 3)} & \\ 0 & \end{array}$$

پس عامل دیگر $5x + 3$ است.

۵۶ گزینه ۳

روش اول:

عبارت صورت سؤال را بر تک‌تک گزینه‌ها تقسیم می‌کنیم. بر هر کدام که بخش‌پذیر نباشد، پاسخ سؤال است.

گزینهٔ ۱ :

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 10x^2 + 9 & x - 1 \\
\underline{-x^4 + x^3} & \overline{x^3 + x^2 - 9x - 9} \\
+x^3 - 10x^2 + 9 & \\
\underline{-x^3 + x^2} & \\
-9x^2 + 9 & \\
\underline{+9x^2 - 9x} & \\
-9x + 9 & \\
\underline{+9x - 9} & \\
0 &
\end{array}
$$

گزینهٔ ۲ :

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 10x^2 + 9 & x - 3 \\
\underline{-x^4 + 3x^3} & \overline{x^3 + 3x^2 - x - 3} \\
+3x^3 - 10x^2 + 9 & \\
\underline{-3x^3 + 9x^2} & \\
-x^2 + 9 & \\
\underline{+x^2 - 3x} & \\
-3x + 9 & \\
\underline{+3x - 9} & \\
0 &
\end{array}
$$

گزینهٔ ۳ : عامل $x - 2$ دیده نمی‌شود.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 10x^2 + 9 & x - 2 \\
\underline{-x^4 + 2x^3} & \overline{x^3 + 2x^2 - 6x - 12} \\
+2x^3 - 10x^2 + 9 & \\
\underline{-2x^3 + 4x^2} & \\
-6x^2 + 9 & \\
\underline{+6x^2 - 12x} & \\
-12x + 9 & \\
\underline{+12x - 24} & \\
-15 &
\end{array}
$$

گزینهٔ ۴ :

$$
\begin{array}{l|l}
x^۴ - ۱۰x^۲ + ۹ & x + ۱ \\ \cline{2-2}
\underline{-x^۴ - x^۳} & x^۳ - x^۲ - ۹x + ۹ \\
\quad - x^۳ - ۱۰x^۲ + ۹ & \\
\quad \underline{+x^۳ + x^۲} & \\
\qquad - ۹x^۲ + ۹ & \\
\qquad \underline{+۹x^۲ + ۹x} & \\
\qquad\quad + ۹x + ۹ & \\
\qquad\quad \underline{-۹x - ۹} & \\
\qquad\qquad ۰ &
\end{array}
$$

روش دوم: ریشهٔ عبارت همهٔ گزینه‌ها را در $x^۴ - ۱۰x^۲ + ۹$ قرار می‌دهیم. اگر حاصل برابر با صفر نشود، نتیجه می‌گیریم که آن عامل در تجزیهٔ عبارت $x^۴ - ۱۰x^۲ + ۹$ وجود ندارد.

گزینهٔ ۱ : $x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow (۱)^۴ - ۱۰(۱)^۲ + ۹ = ۱ - ۱۰ + ۹ = ۰$

گزینهٔ ۲ : $x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow (۳)^۴ - ۱۰(۳)^۲ + ۹ = ۸۱ - ۹۰ + ۹ = ۰$

گزینهٔ ۳ : $x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow (۲)^۴ - ۱۰(۲)^۲ + ۹ = ۱۶ - ۴۰ + ۹ = -۱۵ = ۰$

گزینهٔ ۴ : $x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow (-۱)^۴ - ۱۰(-۱)^۲ + ۹ = ۱ - ۱۰ + ۹ = ۰$

۵۷ گزینه ۱

مساحت مستطیل برابر است با حاصل‌ضرب طول در عرض:

$$\frac{x^۲ + ۴x - ۵}{x^۲ - ۱} \times \frac{x + ۱}{x + ۵} = \frac{\cancel{(x+۵)}\cancel{(x-۱)}}{\cancel{(x-۱)}\cancel{(x+۱)}} \times \frac{\cancel{(x+۱)}}{\cancel{(x+۵)}} = ۱$$

۵۸ گزینه ۱

$$\text{محیط} : (\frac{x - ۴}{x - ۱} + \frac{۳}{x^۲ - x}) \times ۲ = (\frac{(x - ۴)x}{(x - ۱)x} + \frac{۳}{x^۲ - x}) \times ۲$$
$$= \frac{x^۲ - ۴x + ۳}{x^۲ - x} \times ۲ = \frac{(x - ۳)(x - ۱)}{x(x - ۱)} \times ۲ = \frac{۲(x - ۳)}{x} = \frac{۲x - ۶}{x}$$

۵۹ گزینه ۱

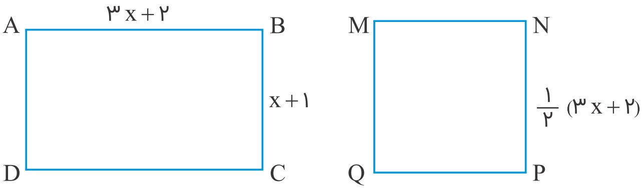
نکته: مساحت ذوزنقه از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{۱}{۲} \times (\text{قاعدهٔ بزرگ} + \text{قاعدهٔ کوچک}) \times \text{ارتفاع}$$

بنابراین داریم:

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{۱}{۲} \times (\frac{۳x + ۲}{x} + x) \times \frac{۲x}{x + ۱}$$
$$= \frac{۱}{۲} \times (\frac{۳x + ۲ + x^۲}{x}) \times \frac{۲x}{x + ۱} = \frac{۱}{\cancel{۲}} \times \frac{\cancel{(x + ۱)}(x + ۲)}{\cancel{x}} \times \frac{\cancel{۲x}}{\cancel{(x + ۱)}} = x + ۲$$

۶۰ گزینه ۲



$$\frac{S_{\text{مربع}}}{S_{\text{مستطیل}}}=\frac{11}{16}\Rightarrow\frac{\left(\frac{1}{2}(3x+2)\right)^2}{(3x+2)(x+1)}=\frac{(3x+2)^{\cancel{2}}}{4\cancel{(3x+2)}(x+1)}=\frac{3x+2}{\cancel{4}(x+1)}=\frac{11}{\underset{4}{\cancel{16}}}$$

$$\Rightarrow 11x+11=12x+8\Rightarrow x=3\Rightarrow\begin{cases}\text{طول مستطیل}=3x+2=3\times3+2=11\\ \text{عرض مستطیل}=x+1=3+1=4\end{cases}$$

$$\text{محیط مستطیل}=2(\text{عرض}+\text{طول})=2(4+11)=30$$

۶۱ گزینه ۲

ابتدا دو کسر داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\text{طول قاعده}=\frac{x^2+5x+6}{2x^2+6x+4}=\frac{\cancel{(x+2)}(x+3)}{2(x+1)\cancel{(x+2)}}=\frac{x+3}{2(x+1)}$$

$$\text{عرض قاعده}=\frac{4x^2+16x+12}{x^2+6x+9}=\frac{4(x^2+4x+3)}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{4\cancel{(x+3)}(x+1)}{(x+3)^{\cancel{2}}}=\frac{4(x+1)}{(x+3)}$$

$$\text{مساحت قاعده}=\frac{\cancel{x+3}}{2\cancel{(x+1)}}\times\frac{4\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+3)}}=2$$

بنابراین مساحت قاعده عددی ثابت است. پس هر چقدر x را تغییر دهیم، مساحت قاعده تغییر نمی‌کند. ارتفاع برحسب x است. پس نمودار گزینهٔ "۲" که مساحت قاعده برحسب ارتفاع تغییر می‌کند، نادرست است.