**۱** گزینه ۳

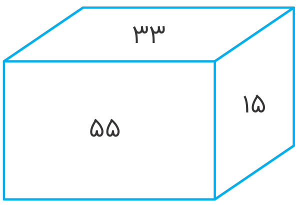
$$\frac{\sqrt[۳]{۳}+۳\sqrt{۲}}{۱}-\frac{۲\sqrt[۳]{۳}+۴\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\cancel{۲\sqrt[۳]{۳}}+۶\sqrt{۲}-\cancel{۲\sqrt[۳]{۳}}-۴\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

اگر ضلع مکعب برابر $a$ باشد، حجم آن برابر $a^{۳}$ است، پس داریم:

$$a^{۳}=\sqrt{۲}\Rightarrow a=\sqrt[۳]{\sqrt{۲}}$$

**۲** گزینه ۴

مکعب‌مستطیل زیر را رسم می‌کنیم و باتوجه‌به آن مساحت جانبی‌های مختلف را محاسبه می‌کنیم:




مساحت جانبی شامل وجه‌هایی با مساحت ۱۵ و ۵۵:

$$۲\times(۱۵+۵۵)=۱۴۰$$

مساحت جانبی شامل وجه‌هایی با مساحت ۱۵ و ۳۳:

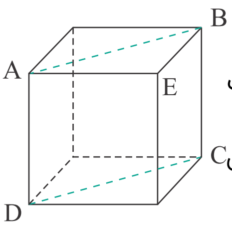
$$۲\times(۱۵+۳۳)=۹۶$$

مساحت جانبی شامل وجه‌هایی با مساحت ۵۵ و ۳۳:

$$۲\times(۵۵+۳۳)=۱۷۶$$



**۳** گزینه ۳




$$\text{مساحت وجه مکعب}=۵^{۲}=۲۵\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABE}}=\frac{۲۵}{۲}$$

$$\text{مستطیل } ABCD\Rightarrow S_{ABCD}=AB\times AD=۵\sqrt{۲}\times ۵=۲۵\sqrt{۲}$$

مساحت کل یکی از قسمت‌های بریده‌شده برابر است با:

$$S=۲۵+۲۵+۲\times\frac{۲۵}{۲}+۲۵\sqrt{۲}=۷۵+۲۵\sqrt{۲}=۲۵(۳+\sqrt{۲})$$

**۴** گزینه ۴

هر قسمت از ۲ وجه مربعی شکل، ۲ وجه مثلثی شکل و ۱ وجه مستطیل شکل تشکیل شده است.
طول ضلع مربع برابر $۳b$ و مثلث‌ها قائم‌الزاویه هستند و طول هر یک از اضلاع قائمه برابر $۳b$ است و طول و عرض مستطیل به ترتیب برابر $\sqrt{(۳b)^۲+(۳b)^۲}=۳\sqrt{۲}b$ و $۳b$ است.

$$۲\times(۳b\times ۳b)+۲\times\frac{(۳b\times ۳b)}{۲}+۳b\times ۳\sqrt{۲}b$$
$$=۱۸b^۲+۹b^۲+۹\sqrt{۲}b^۲=۲۷b^۲+۹\sqrt{۲}b^۲=(۲۷+۹\sqrt{۲})b^۲$$

**۵** گزینه ۳

فرض کنید ضلع مکعب $a$ باشد، بنابراین :

$$V=a^۳=۴۳۲$$
$$V_{ABCD}=\frac{S_{ACD}\times a}{۳}=\frac{\frac{a^۲}{۲}\times a}{۳}=\frac{a^۳}{۶}=\frac{۴۳۲}{۶}=۷۲$$

**۶** گزینه ۲

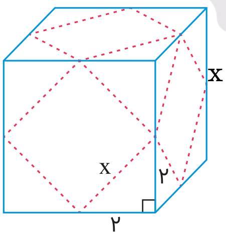
حجم هرم $AFBC$ با قاعدهٔ $ABC$ و ارتفاع $BF$ برابر است با:

$$V=\frac{۱}{۳}\times \text{مساحت قاعده}\times \text{ارتفاع}=\frac{۱}{۳}\times(\frac{۱\times ۱}{۲})\times ۱=\frac{۱}{۶}$$

حال ۴تا از این هرم‌ها موجود است پس حجم آن‌ها برابر است با: $۴\times\frac{۱}{۶}=\frac{۲}{۳}$
همچنین حجم کل مکعب به ضلع ۱، برابر ۱ است. پس حجم باقیمانده برابر است با: $۱-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}$

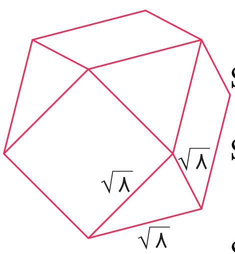
**۷** گزینه ۱

طول یال مکعب ۴ است بنابراین طول اضلاع قائمهٔ مثلث برابر با ۲ می‌باشد و طبق قضیهٔ فیثاغورس، وتر مثلث (ضلع مربع کوچک) برابر است با:




$$x=\sqrt{۲^۲+۲^۲}=\sqrt{۸}$$

با برش هرم‌ها از هشت گوشهٔ مکعب، شکل زیر حاصل می‌شود که شامل شش مربع و هشت مثلث متساوی‌الاضلاع است.



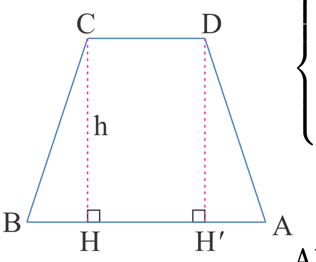

$$S_{\text{مربع}}=(\sqrt{۸})^۲=۸\Rightarrow S_{\text{مربع}}=۶\times ۸=۴۸$$
$$S_{\text{مثلث متساوی‌الاضلاع}}=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{(\sqrt{۸})^۲\sqrt{۳}}{۴}=۲\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow S_{\text{مثلث‌ها}}=۲\sqrt{۳}\times ۸=۱۶\sqrt{۳}$$
$$S_{\text{کل}}=S_{\text{مربع‌ها}}+S_{\text{مثلث‌ها}}=۴۸+۱۶\sqrt{۳}=۱۶(۳+\sqrt{۳})$$

نکته: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $a$ برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$.

**۸** گزینه ۳

۴ضلعی $ABCD$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است و مساحت آن برابر است با:

$$S=\frac{(AB+CD)h}{۲}$$




$$\begin{cases} CD=HH' \\ CH=DH'=h \\ AH'=BH=\dfrac{AB-HH'}{۲}=\dfrac{AB-CD}{۲}\end{cases}$$

حال با استفاده از فیثاغورس داریم:

$$AB=\sqrt{a^{۲}+a^{۲}}=a\sqrt{۲}$$

$$(CD)^{۲}=(\frac{a}{۲})^{۲}+(\frac{a}{۲})^{۲}\Rightarrow CD=\sqrt{\frac{۲a^{۲}}{۴}}=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

برای به دست آوردن ارتفاع $(h)$، ابتدا باید طول ضلع $BH$ را به دست آوریم که برابر است با:

$$BH=\frac{AB-CD}{۲}=\frac{a\sqrt{۲}-\dfrac{a\sqrt{۲}}{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}a$$

همچنین طول ضلع $BC$ برابر است با:

$$BC^{۲}=a^{۲}+(\frac{a}{۲})^{۲}\Rightarrow BC=\frac{\sqrt{۵}}{۲}a$$

$$h^{۲}=BC^{۲}-BH^{۲}=(\frac{\sqrt{۵}}{۲}a)^{۲}-(\frac{\sqrt{۲}}{۴}a)^{۲}=\frac{۵}{۴}a^{۲}-\frac{۲}{۱۶}a^{۲}=\frac{۱۸}{۱۶}a^{۲}$$

$$\Rightarrow h=\sqrt{\frac{۱۸}{۱۶}a^{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}a$$

بنابراین مساحت ذوزنقه برابر است با:

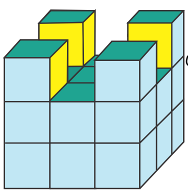
$$S=\frac{(AB+CD)h}{۲}=\frac{(a\sqrt{۲}+\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}a)(\dfrac{۳\sqrt{۲}}{۴}a)}{۲}$$

$$=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}a\times\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}a=\frac{۹\times۲}{۱۶}a^{۲}=\frac{۹}{۸}a^{۲}$$



**۹** گزینه ۲

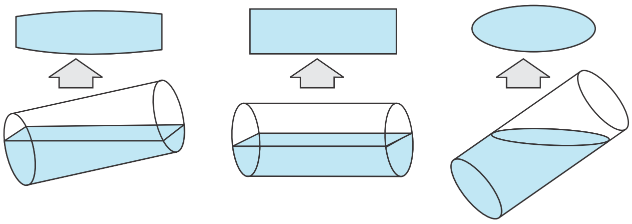
پنج مکعب مطابق شکل زیر برداشته شده است:



$$\underbrace{(۴\times۸)}_{\text{سطح جانبی}}+\underbrace{(۲\times۹)}_{\text{بالا و پایین}}+\underbrace{(۴\times۲)}_{\text{گوشه‌های داخلی}}=۳۲+۱۸+۸=۵۸$$

**۱۰** گزینه ۱

به‌سادگی و تجسم می‌توان گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ را تشکیل داد.



**۱۱** گزینه ۱

$$\begin{cases} V = \pi r^{۲} h \\ S_{\text{جانبی}} = ۲\pi r h \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi r^{۲} h}{۲\pi r h} = ۱ \Rightarrow \frac{r}{۲} = ۱$$

$$\begin{cases} V' = \pi r^{۲}(۳h) \\ S'_{\text{جانبی}} = ۲\pi r(۳h) \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi r^{۲}(۳h)}{۲\pi r(۳h)} = \frac{r}{۲} = ۱$$

بنابراین نسبت تغییر نمی‌کند.

**۱۲** گزینه ۲

محفظهٔ بیرونی استوانه‌ای است به ارتفاع $h + ۳۰$ و شعاع قاعدهٔ $r + ۱۵$، بنابراین داریم:

$$V = \pi(r+۱۵)^{۲}(h+۳۰) = ۴۳۲ \Rightarrow h + ۳۰ = \frac{۴۳۲}{\pi(r+۱۵)^{۲}} \Rightarrow h = \frac{۴۳۲}{\pi(r+۱۵)^{۲}} - ۳۰$$

**۱۳** گزینه ۱

دارای دو قسمت است:

$$V_{\text{مکعب}} : a^{۳} = ۶^{۳} = ۲۱۶$$

$$V_{\text{هرم}} = \frac{۱}{۳} sh = \frac{۱}{۳} \times ۶ \times ۶ \times ۴ = ۴۸$$

$$\text{حجم کل} : ۲۱۶ + ۴۸ = ۲۶۴$$

**۱۴** گزینه ۳

در قسمت اول (یعنی استوانه) با ورود آب، ارتفاع با سرعت ثابت و شیب ثابتی در نمودار به شکل خطی افزایش می‌یابد اما با ورود آب به مخروط ناقص، به دلیل بزرگ شدن مقطع، با بالا آمدن آب، سرعت افزایش و ارتفاع کاهش می‌یابد.

**۱۵** گزینه ۱

$$\text{مساحت کره} = ۴\pi r^{۲} \Rightarrow S = ۴ \times ۳ \times ۱۰^{۲} \Rightarrow S = ۱۲۰۰\ cm^{۲}$$

۱۶ گزینه ۴

$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = ۳۶\pi \Rightarrow \frac{۴}{۳}r^۳ = ۳۶ \Rightarrow r^۳ = ۳۶ \times \frac{۳}{۴} = ۲۷ \Rightarrow r = ۳$$

$$S = ۴\pi r^۲ = ۴\pi \times ۳^۲ = ۳۶\pi$$

۱۷ گزینه ۲

مساحت کره : $۴\pi r^۲ = ۴\pi \times ۴^۲ = ۶۴\pi$

مساحت نیمکرهٔ توپر : $۳\pi r^۲ = ۳\pi \times ۴^۲ = ۴۸\pi$

اختلاف : $۶۴\pi - ۴۸\pi = ۱۶\pi$

۱۸ گزینه ۴

$$\begin{cases} \text{حجم کره} = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \\ \text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h \end{cases} \xrightarrow{\text{تساوی}} \frac{۴}{۳} \times ۱۰^۳ \times \pi = \frac{۱}{۳} \times ۱۰^۲ \times \pi h$$

$$\Rightarrow h = ۴ \times \underbrace{۱۰}_{R} \Rightarrow h = ۴R$$

۱۹ گزینه ۱

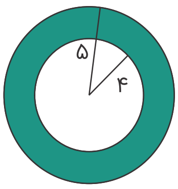
مساحت یک نیمکرهٔ توپُر به شعاع R برابر است با: $۳\pi R^۲$

$$۳\pi R^۲ = ۱۲۰ \Rightarrow R^۲ = \frac{۱۲۰}{۳\pi} = \frac{۴۰}{\pi} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{۴۰}{\pi}}\,cm$$

$$\text{مساحت کره به شعاع } R = ۴\pi R^۲ = ۴ \times \pi \times \left(\sqrt{\frac{۴۰}{\pi}}\right)^۲ = ۴\cancel{\pi} \times \frac{۴۰}{\cancel{\pi}} = ۱۶۰\ cm^۲$$

۲۰ گزینه ۴

بخش‌هایی که باید رنگ شوند، شامل سطح نیمکرهٔ بیرونی به شعاع ۵، سطح نیمکرهٔ داخلی به شعاع ۴ و ضخامت مقطع ظرف به شکل زیر است.




$$\left.\begin{array}{l} S_o = ۲\pi r_o^۲ = ۲ \times ۳ \times ۵^۲ = ۱۵۰\,cm^۲ \\ S_i = ۲\pi r_i^۲ = ۲ \times ۳ \times ۴^۲ = ۹۶\,cm^۲ \\ S_m = (\pi \times ۵^۲) - (\pi \times ۴^۲) = ۲۷\,cm^۲ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow S = S_o + S_i + S_m = ۱۵۰ + ۹۶ + ۲۷ = ۲۷۳\,cm^۲ = ۰/۰۲۷۳\,m^۲$$

میزان رنگ مصرفی $= ۱۰۰ \times ۰/۰۲۷۳ = ۲/۷۳$ گرم

۲۱ گزینه ۳

نکته: مساحت رویهٔ یک نیمکره، دو برابر مساحت دایره‌ای است که نیمکره روی آن ایستاده است.
سطح رویهٔ کیک دو برابر سطح کف آن است، پس به میزان دو برابر آن خامه لازم داریم.

$$۳۰۰ \times ۲ = ۶۰۰$$

۲۲ گزینه ۲

در حال حاضر حجم و مساحت توپ برابر شده است، بنابراین شعاع توپ را به دست می‌آوریم ($r_۲$: شعاع کنونی توپ)

$$\text{حجم توپ} = \text{مساحت توپ} \Rightarrow \frac{\cancel{۴}}{۳}\cancel{\pi} r_۲^۳ = \cancel{۴}\cancel{\pi} r_۲^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۳}r_۲^۳ = r_۲^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}r_۲ = ۱ \Rightarrow r_۲ = ۳$$

پس شعاع توپ در حال حاضر برابر با ۳ می‌باشد. حجم توپ $\frac{۱۴۸}{۳}\pi$ کاهش یافته است. اگر $r_۱$ شعاع اولیهٔ توپ باشد، داریم:

$$V_۱ - V_۲ = \frac{۱۴۸}{۳}\pi \Rightarrow \frac{۴}{۳}\pi r_۱^۳ - \frac{۴}{۳}\pi r_۲^۳ = \frac{۱۴۸}{۳}\pi$$
$$\Rightarrow \frac{۴}{۳}\pi r_۱^۳ - \frac{۴}{۳}\pi(۳)^۳ = \frac{۱۴۸}{۳}\pi \Rightarrow \frac{۴}{۳}\pi(r_۱^۳ - ۲۷) = \frac{۱۴۸}{۳}\pi$$
$$\Rightarrow r_۱^۳ - ۲۷ = ۳۷ \Rightarrow r_۱^۳ = ۶۴ \Rightarrow r_۱ = ۴$$

پس شعاع ابتدایی توپ برابر با ۴ است.

۲۳ گزینه ۳

$$\text{مساحت دایره} = \pi R^۲ = ۴۰۰\pi \Rightarrow R^۲ = ۴۰۰ \Rightarrow R = ۲۰$$

$$\text{محیط دایره} = ۲\pi R = ۲ \times ۲۰ \times \pi = ۴۰\pi$$

| | |
|---|---|
| $۳۶۰^\circ$ | $۴۰\pi$ |
| $۳۱۵^\circ$ | x |

$$\Rightarrow x = \frac{\cancel{۳۱۵}^{۳۵} \times \cancel{۴۰}^{۱}\pi}{\cancel{\cancel{۳۶۰}}_{\cancel{۹}_{۱}}} = ۳۵\pi$$

۲۴ گزینه ۳

$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

$$V = \frac{۱}{۳}S.h$$

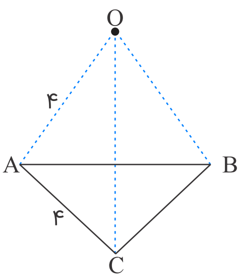
$$V = \frac{۱}{۳} \times (۳ \times ۵) \times ۶ = ۳۰\ cm^۳$$

**۲۵** گزینه ۴

$$\text{ارتفاع هرم} = \text{نصف محیط} = \frac{۱۲+۱۳+۵}{۲} = ۱۵$$

$$\text{حجم هرم}: V = \frac{۱}{۳} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} \Rightarrow \frac{۱}{۳} \times \left(\frac{۵ \times ۱۲}{۲}\right) \times ۱۵ = ۱۵۰$$

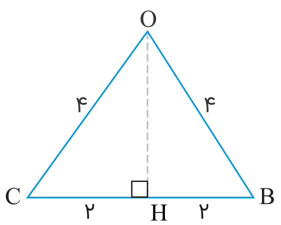
**۲۶** گزینه ۲




هرم با چهار وجه منتظم یعنی هرمی با قاعده و وجه‌های جانبی مثلث متساوی‌الاضلاع:

$$\text{مساحت هرم} = ۴ \times \text{مساحت هر وجه}$$

ارتفاع هر مثلث را به دست می‌آوریم:




$$۴^۲ = ۲^۲ + OH^۲ \Rightarrow OH^۲ = ۱۲ \Rightarrow OH = ۲\sqrt{۳}$$

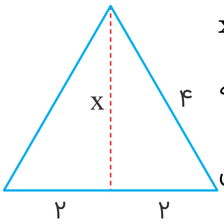
$$\text{مساحت هر وجه} = \frac{۴ \times ۲\sqrt{۳}}{۲} = ۴\sqrt{۳}$$

$$\text{مساحت هرم} = ۴ \times ۴\sqrt{۳} = ۱۶\sqrt{۳}$$

**۲۷** گزینه ۱

$$\text{مساحت کل} = \text{مساحت قاعده} + ۴(\text{مساحت یک وجه})$$

هر وجه به‌صورت یک مثلث متساوی‌الاضلاع است، ارتفاع هر وجه را به دست می‌آوریم:

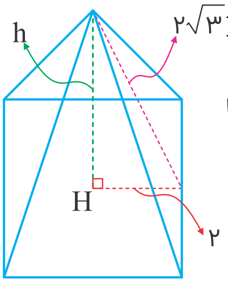



$$x^۲ = ۴^۲ - ۲^۲ = ۱۶ - ۴ = ۱۲ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۳}$$

$$\text{مساحت هر وجه} : \frac{۲\sqrt{۳} \times ۴}{۲} = ۴\sqrt{۳}$$

$$\text{مساحت کل} = ۴ \times ۴ + ۴(۴\sqrt{۳}) = ۱۶ + ۱۶\sqrt{۳} = ۱۶(۱ + \sqrt{۳})$$

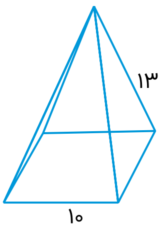
ارتفاع هرم را با استفاده از ارتفاع هر وجه به دست می‌آوریم:



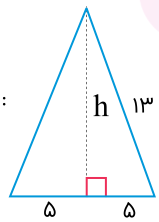

$$h^۲ = (۲\sqrt{۳})^۲ - ۲^۲ = ۱۲ - ۴ = ۸ \Rightarrow h = ۲\sqrt{۲}$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳}S_{\text{قاعده}}h = \frac{۱}{۳} \times ۱۶ \times ۲\sqrt{۲} = \frac{۳۲\sqrt{۲}}{۳}$$

**۲۸** گزینه ۲




یک وجه :



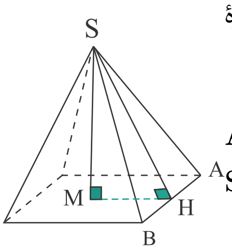

$$۱۳^۲ = ۵^۲ + h^۲ \Rightarrow h = ۱۲$$

$$\text{مساحت یک وجه} : \frac{۱۲ \times ۱۰}{۲} = ۶۰$$

$$\text{مساحت جانبی} : ۶۰ \times ۴ = ۲۴۰$$



**۲۹** گزینه ۲




برای محاسبهٔ حجم هرم به مساحت قاعده و ارتفاع نیاز داریم. محل تقاطع ارتفاع با قاعدهٔ هرم را نقطهٔ $M$ در نظر بگیرید. اندازهٔ $AH$ و $SM$ را با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس به دست می‌آوریم؛ در مثلث‌های $\overset{\Delta}{SHA}$ و $\overset{\Delta}{SMH}$ به ترتیب داریم:

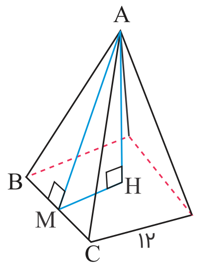
$$AH^۲ = SA^۲ - SH^۲ = ۱۰^۲ - ۸^۲ = ۳۶ \Rightarrow AH = ۶ \Rightarrow AB = ۱۲cm$$

$$SM^۲ = SH^۲ - MH^۲ = ۸^۲ - ۶^۲ = ۲۸ \Rightarrow SM = \sqrt{۲۸} \Rightarrow h = \sqrt{۲۸}cm$$

$$V = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{۳} \times ۱۲^۲ \times \sqrt{۲۸} = \frac{۱}{۳} \times ۱۴۴ \times \sqrt{۲۸} = ۴۸\sqrt{۲۸}cm^۳$$

۳۰

گزینه ۳




$AH = \sqrt{۲۸}\ ,\ HM = \frac{۱۲}{۲} = ۶$

$\Rightarrow \overset{\Delta}{AHM} : AH^{۲} + HM^{۲} = AM^{۲} \Rightarrow ۲۸ + ۳۶ = AM^{۲}$

$\Rightarrow AM^{۲} = ۶۴ \Rightarrow AM = ۸$

$S_{\text{جانبی}} = ۴ \times S_{\overset{\Delta}{ABC}} = ۴ \times \frac{۱}{۲}(BC \times AM) = ۲(BC \times AM)$

$= ۲(۱۲ \times ۸) = ۱۹۲\,cm^{۲}$

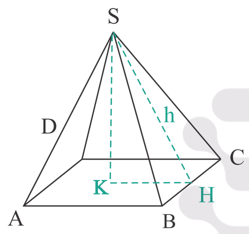
۳۱

گزینه ۳

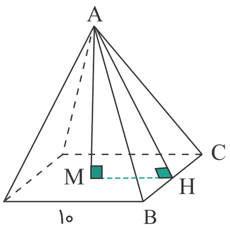
$\text{مساحت } \overset{\Delta}{SBC} = \frac{۶۰}{۴} = ۱۵ = ۶ \times h \times \frac{۱}{۲} \Rightarrow h = ۵$

$\overline{SK}^{۲} = SH^{۲} - \overline{KH}^{۲} \Rightarrow \overline{SK}^{۲} = ۵^{۲} - ۳^{۲} \Rightarrow \overline{SK} = ۴$

$\Rightarrow V = \frac{۱}{۳} \times ۶ \times ۶ \times ۴ = ۴۸$



گزینه ۴




مساحت کل این هرم شامل ۴ مثلث متساوی‌الساقین و یک مربع است. مساحت مربع برابر است با:

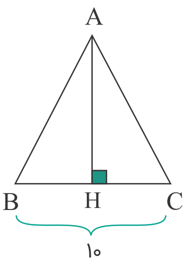
$$۱۰ \times ۱۰ = ۱۰۰\,\text{cm}^{۲}$$

بنابراین مساحت ۴ مثلث اطراف برابر است با:

$$۳۶۰ - ۱۰۰ = ۲۶۰\,\text{cm}^{۲}$$

مساحت هر کدام از مثلث‌ها، مساوی است با:

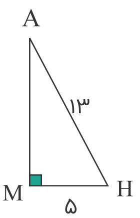
$$۲۶۰ \div ۴ = ۶۵\,\text{cm}^{۲}$$




$$\overset{\triangle}{ABC}\ \text{مساحت} = ۶۵ = \frac{BC \times AH}{۲}$$

$$\Rightarrow ۶۵ = \frac{\overset{۵}{\cancel{۱۰}} \times AH}{\underset{۱}{\cancel{۲}}} \Rightarrow AH = ۱۳\text{cm}$$

بنابراین می‌توان ارتفاع هرم را با توجه به مثلث قائم‌الزاویه AMH به دست آورد.




$$\Rightarrow AM^{۲} = AH^{۲} - MH^{۲} = ۱۳^{۲} - ۵^{۲}$$
$$= ۱۶۹ - ۲۵ = ۱۴۴ \Rightarrow AM = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$$

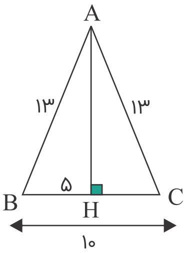
حجم کل هرم برابر است با:

$$V_{\text{هرم}} = \frac{۱}{۳}(\text{مساحت قاعده}) \times \text{ارتفاع} = \frac{۱}{\underset{۱}{\cancel{۳}}} \times (۱۰ \times ۱۰) \times \overset{۴}{\cancel{۱۲}} = ۴۰۰\,\text{cm}^{۳}$$

## ۳۳

گزینه ۳

باید ابتدا ارتفاع هر وجه را به دست آوریم. چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، بنابراین ارتفاع AH میانه است، پس $BH = ۵$ است.




$$\Rightarrow AH^۲ = AB^۲ - BH^۲ \Rightarrow AH^۲ = ۱۳^۲ - ۵^۲$$
$$= ۱۶۹ - ۲۵ = ۱۴۴ \Rightarrow AH = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$$

مساحت هر مثلث جانبی هرم برابر است با:

$$\frac{۱۰ \times \cancel{۱۲}^{۶}}{\cancel{۲}_{۱}} = ۶۰\,cm^۲$$

پس مساحت جانبی هرم برابر است با:

$$۶ \times ۶۰ = ۳۶۰\,cm^۲$$

## ۳۴

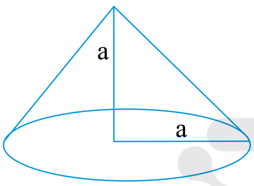
گزینه ۴

$$\text{حجم مخروط } V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h \Rightarrow \frac{۱}{۳} \times ۳/۱۴ \times (۵)^۲ \times h = ۱۵۷$$
$$\Rightarrow \frac{۷۸/۵}{۳} \times h = ۱۵۷ \Rightarrow h = ۶$$

## ۳۵

گزینه ۱

حجم مخروط برابر است با $\frac{۱}{۳}$ مساحت قاعدهٔ (دایره) ضرب در ارتفاع آن.




$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h \xrightarrow[h=a]{r=a} V = \frac{۱}{۳}\pi a^۲ \times a = \frac{۱}{۳}\pi a^۳$$

## ۳۶

گزینه ۳

حجم مخروط را $V$ در نظر بگیرید، داریم:

$$V = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{۳} \times ۱۶\pi \times ۱۰ = \frac{۱۶۰\pi}{۳}cm^۳$$
$$\frac{۱۶۰\pi}{۳} \div \frac{۵}{۱۰۰} = \frac{۱۶۰\pi}{۳} \times \frac{۱۰۰}{۵} = \frac{۳۲۰۰\pi}{۳}$$

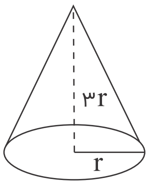
**۳۷** گزینه ۲

نکته: حجم مخروط از رابطهٔ $V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$ به دست می‌آید. بنابراین اگر $r_۲=۲r_۱$ و $h_۲=\frac{۱}{۲}h_۱$، داریم:

$$\frac{V_۱}{V_۲}=\frac{\cancel{\frac{۱}{۳}}\cancel{\pi}r_۱^۲h_۱}{\cancel{\frac{۱}{۳}}\cancel{\pi}(۲r_۱)^۲(\frac{۱}{۲}h_۱)}=\frac{\cancel{r_۱^۲}\times\cancel{h_۱}}{۴\cancel{r_۱^۲}\times\frac{۱}{۲}\cancel{h_۱}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow V_۲=۲V_۱$$

پس حجم دو برابر می‌شود.

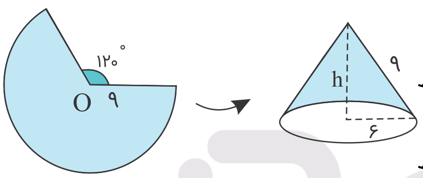
**۳۸** گزینه ۴




$$V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h=\frac{۱}{\cancel{۳}}\pi r^۲\times\cancel{۳}r=\pi r^۳$$

$$\pi r^۳=۲۱۶\pi\Rightarrow r^۳=۲۱۶\Rightarrow r=۶\Rightarrow h=۱۸$$

**۳۹** گزینه ۲




$$\text{محیط قاعده مخروط}:\ \frac{۲۴۰}{۳۶۰}\times۲\pi\times۹=\frac{۲}{۳}\times۲\pi\times۹=۱۲\pi$$

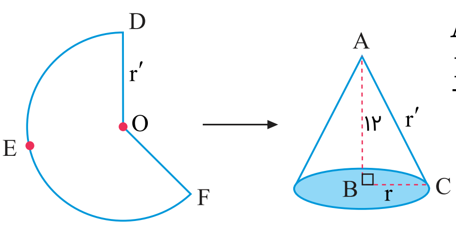
$$\text{شعاع قاعده مخروط}:\ \frac{۱۲\pi}{۲\pi}=۶$$

**۴۰** گزینه ۴

$$V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h\Rightarrow۱۰۰\cancel{\pi}=\frac{۱}{\cancel{۳}}\cancel{\pi}r^۲\times\overset{۴}{\cancel{۱۲}}\Rightarrow۱۰۰=۴r^۲$$

$$\Rightarrow r^۲=۲۵\Rightarrow r=۵\ \text{شعاع قاعدهٔ مخروط}$$

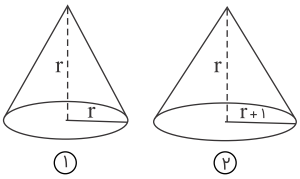
طبق فیثاغورس در مثلث $ABC$ داریم:




$$AB^۲+BC^۲=AC^۲\Rightarrow۱۴۴+۲۵=AC^۲=۱۶۹\Rightarrow AC=۱۳=r'$$

$$\frac{\text{طول کمان } DEF}{\text{محیط دایره}}=\frac{۲\pi r}{۲\pi r'}=\frac{۲\pi(۵)}{۲\pi(۱۳)}=\frac{۵}{۱۳}$$

**۴۱** گزینه ۳




$$V_۱ = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ \times r = \frac{۱}{۳}\pi r^۳$$

$$V_۲ = \frac{۱}{۳}\pi (r+۱)^۲ \times r$$

$$V_۲ - V_۱ = \frac{۱}{۳}\pi (r+۱)^۲ \times r - \frac{۱}{۳}\pi r^۳ = \frac{۱}{۳}\pi r[(r+۱)^۲ - r^۲]$$

$$= \frac{۱}{۳}\pi r(۲r+۱) = ۱۲\pi \Rightarrow r(۲r+۱) = ۳۶ \Rightarrow r = ۴$$

$\Rightarrow r + ۱ = ۵$ شعاع قاعدهٔ مخروط بزرگ‌تر

**۴۲** گزینه ۱

شعاع کرهٔ کوچک را R و شعاع کرهٔ بزرگ را ۲R در نظر می‌گیریم.

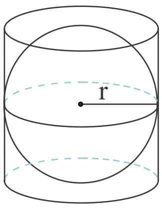
فضای بین دو کره $V = \frac{۴}{۳}\pi (۲R)^۳ - \frac{۴}{۳}\pi R^۳$

$$= \frac{۴}{۳}\pi \times ۸R^۳ - \frac{۴}{۳}\pi R^۳$$

$$= \frac{۳۲}{۳}\pi R^۳ - \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \pi R^۳ (\frac{۳۲}{۳} - \frac{۴}{۳}) = \frac{۲۸}{۳}\pi R^۳$$

$$\frac{\text{حجم فضای بین دو کره}}{\text{حجم کرهٔ بزرگ‌تر}} = \frac{\frac{۲۸}{۳}\pi R^۳}{\frac{۳۲}{۳}\pi R^۳} = \frac{۲۸}{۳۲} = \frac{۷}{۸}$$

**۴۳** گزینه ۳

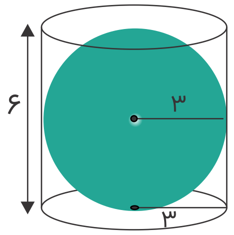



$h = ۲r$

$$\frac{\text{حجم کره}}{\text{حجم استوانه}} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi r^۳}{\pi r^۲ \times h} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi r^۳}{\pi r^۲ \times ۲r} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi r^۳}{۲\pi r^۳} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

**۴۴** گزینه ۱

ارتفاع استوانه برابر قطر کره است؛ بنابراین شعاع کره و شعاع قاعدهٔ استوانه برابر نصف ارتفاع یعنی ۳ است.

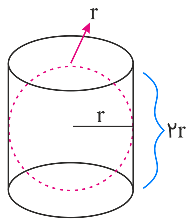



حجم استوانه $= \pi R^{۲} h = \pi \times (۳)^{۲} \times ۶ = ۵۴\pi$

حجم کره $= \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} = \frac{۴}{۳}\pi \times (۳)^{۳} = \frac{۴}{\cancel{۳}_{۱}} \times \cancel{۲۷}^{۹} \times \pi = ۳۶\pi$

حجم فضای بین استوانه و کره $= ۵۴\pi - ۳۶\pi = ۱۸\pi$

**۴۵** گزینه ۳

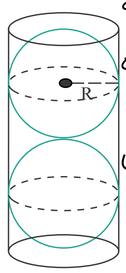



$V_{\text{کره}} = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} = \frac{۴}{۳}\pi \times ۲^{۳} = \frac{۳۲}{۳}\pi$

$V_{\text{استوانه}} = \pi r^{۲} h = \pi(۲)^{۲} \times ۴ = ۱۶\pi$

اختلاف : $۱۶\pi - \frac{۳۲}{۳}\pi = \frac{۴۸ - ۳۲}{۳}\pi = \frac{۱۶}{۳}\pi$

**۴۶** گزینه ۳



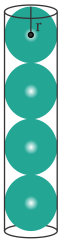

حجم استوانه $= \pi R^{۲} \times ۴R = ۴\pi R^{۳}$

حجم دو کره $= ۲ \times \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} = \frac{۸}{۳}\pi R^{۳}$

$V_{\text{فضای خالی}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{دو کره}} = ۴\pi R^{۳} - \frac{۸}{۳}\pi R^{۳} = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$

درنتیجه حجم فضای خالی مساوی حجم هر کره است.

۴۷ گزینه ۴



$$\left.\begin{array}{l} h_{\text{استوانه}} = ۴ \times ۲r = ۸r \\ S_{\text{قاعدهٔ استوانه}} = \pi r^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow V_{\text{استوانه}} = ۸r \times \pi r^۲ = ۸\pi r^۳$$

$$V_{\text{کره‌ها}} = ۴ \times \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۱۶}{۳}\pi r^۳$$

$$\text{فضای خالی بین استوانه و توپ‌ها} : V = ۸\pi r^۳ - \frac{۱۶}{۳}\pi r^۳ = \pi r^۳ (۸ - \frac{۱۶}{۳}) = \frac{۸}{۳}\pi r^۳$$

$$\frac{V_{\text{فضای خالی}}}{V_{\text{یک توپ}}} = \frac{\frac{۸}{۳}\pi r^۳}{\frac{۴}{۳}\pi r^۳} = ۲$$

۴۸ گزینه ۱

کره در مکعبی به ضلع ۱۰ سانتی‌متر محاط شده است، ضلع مکعب برابر با قطر کره است:

$$\text{حجم کره} = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۴}{۳} \times ۳ \times (۵)^۳ = ۴ \times ۱۲۵ = ۵۰۰$$

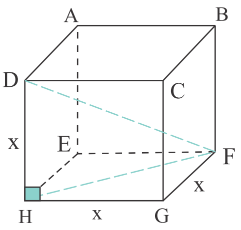
۴۹ گزینه ۱

در این حالت قطر کره با ضلع مکعب برابر است، پس شعاع کره، ۶ می‌باشد.

$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۴}{۳} \times ۳ \times ۶^۳ = ۴ \times ۲۱۶ = ۸۶۴$$

**۵۰** گزینه ۴

در مکعب ABCDEFGH به مستطیل BFHD توجه کنید. محل برخورد قطرهای این مستطیل از $B$ و $F$ و $H$ و $D$ به یک فاصله است، پس مرکز کره محل برخورد قطرهای مستطیل BFHD است؛ پس طول DF دو برابر شعاع کره است.
طول یال مکعب را x می‌گیریم.

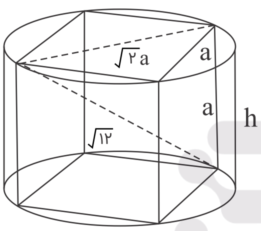



$$\overline{DF} = ۲R$$
$$\overline{HF}^{۲} = \overline{HG}^{۲} + \overline{GF}^{۲} \Rightarrow \overline{HF}^{۲} = ۲x^{۲}$$
$$\overline{DF}^{۲} = \overline{DH}^{۲} + \overline{HF}^{۲} = x^{۲} + ۲x^{۲} = ۳x^{۲} \Rightarrow ۴R^{۲} = ۳x^{۲} \Rightarrow x = \frac{۲}{\sqrt{۳}}R$$
$$\frac{\text{حجم کره}}{\text{حجم مکعب}} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}}{\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}}\right)^{۳} \times R^{۳}} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi}{\frac{۸}{۳\sqrt{۳}}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\pi$$

**۵۱** گزینه ۴

هر ضلع از مکعب را a در نظر می‌گیریم؛ درنتیجه قطر قاعده با استفاده از فیثاغورس $\sqrt{۲}a$ می‌شود:

$$a^{۲} + a^{۲} = ۲a^{۲} \Rightarrow \text{قطر قاعده} = \sqrt{۲}a$$




$$a^{۲} + (\sqrt{۲}a)^{۲} = (\sqrt{۱۲})^{۲} \Rightarrow a^{۲} + ۲a^{۲} = ۱۲ \Rightarrow ۳a^{۲} = ۱۲ \Rightarrow a^{۲} = ۴ \Rightarrow a = ۲$$

$$\left.\begin{array}{l} (\text{حجم استوانه})v = \pi r^{۲}h \\ \text{شعاع} : r = \frac{\sqrt{۲}a}{۲} \ , \ h = a \end{array}\right\} \Rightarrow v = \pi \times \frac{\cancel{۲}^{۱} a^{۲}}{\cancel{۴}_{۲}} \times a = \frac{\pi a^{۳}}{۲} \xrightarrow{a=۲} v = \frac{۸\pi}{۲} = ۴\pi$$

**۵۲** گزینه ۳

بزرگ‌ترین هرمی که در داخل استخر قرار می‌گیرد، قاعدهٔ مستطیل‌شکل به ابعاد ۲۰ و ۱۲ و ارتفاع ۴ متر است. چون حجم هرم، $\frac{۱}{۳}$ حجم منشور باقاعدهٔ مساوی با آن است، بنابراین از این نوع هرم ۳ تا داخل استخر جای می‌گیرد.

۵۳

گزینه ۲

r: شعاع قاعدهٔ استوانه　　h: ارتفاع استوانه

S: مساحت قاعدهٔ هرم　　h′: ارتفاع هرم

استوانه بر کره‌ای به شعاع ۲a محیط می‌باشد، درنتیجه شعاع قاعدهٔ استوانه برابر با ۲a و ارتفاع استوانه برابر با ۴a است. همچنین شعاع کره با شعاع قاعدهٔ استوانه برابر می‌باشد.

$$V_{\text{هرم}} = V_{\text{استوانه}} \Rightarrow \frac{۱}{۳}S.h' = \pi r^۲.h$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}(a^۲)(۶) = \pi(۲a)^۲(۴a)$$

$$\Rightarrow ۲a^۲ = ۱۶a^۳\pi \Rightarrow ۸a\pi = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۸\pi}$$

$$\Rightarrow V_{\text{کره}} = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۴}{۳}\pi(۲a)^۳ = \frac{۴}{۳}\pi(\frac{۲}{۸\pi})^۳ = \frac{۴}{۳}\pi(\frac{۱}{۴\pi})^۳$$

$$= \frac{۱}{۳ \times ۴^۲ \times \pi^۲} = \frac{۱}{۴۸\pi^۲}$$

۵۴

گزینه ۲

گزینهٔ ۲ نادرست است، زیرا اگر شعاع عددی گنگ و حجم عددی گویا باشد، دراین‌صورت مساحت حتما عددی گنگ خواهد شد:

$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = k\ ,\ \ k \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow r^۳ = \frac{۳k}{۴\pi} = \frac{k'}{\pi}\ (k' \in \mathbb{Q}) \Rightarrow r = \sqrt[۳]{\frac{k'}{\pi}} \in \mathbb{Q}^c$$

$$S = ۴\pi r^۲ = ۴\pi(\sqrt[۳]{\frac{k'}{\pi}})^۲ = ۴\sqrt[۳]{\frac{(k')^۲\pi^۳}{\pi^۲}} = ۴\sqrt[۳]{(k')^۲\pi}$$

$$k' \in \mathbb{Q} \Rightarrow (k')^۲ \in \mathbb{Q} \Rightarrow (k')^۲\pi \in \mathbb{Q}^c \Rightarrow ۴\sqrt[۳]{(k')^۲\pi} \in \mathbb{Q}^c$$

۵۵

گزینه ۴

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi R^۲h\ ,\ V_{\text{کره}} = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \Rightarrow \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۱}{۳}\pi R^۲h$$

$$\Rightarrow h = \frac{\frac{۴}{۳}\pi R^۳}{\frac{۱}{۳}\pi R^۲} = ۴R$$

۵۶

گزینه ۳

$$\pi r^۲h = ۱۹۲ \Rightarrow ۳ \times (۴^۲) \times h = ۱۹۲ \Rightarrow h = \frac{۱۹۲}{۴۸} = ۴\ \text{سانتی‌متر}$$

۵۷

گزینه ۲

$$\text{حجم هرم} : \frac{۱}{۳} \times ۶ \times ۶ \times ۴ = ۴۸$$

$$\text{مقدار آب} \div \text{مساحت قاعده} = ۴۸ \div (۱۲ \times ۱۲ \times ۳) = \frac{۴۸}{۱۲ \times ۱۲ \times ۳} = \frac{۱}{۹}$$

**۵۸** گزینه ۴

$$\text{حجم نیمکره}: \frac{\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}}{۲} = \frac{۴}{۶} \times ۳ \times ۸^{۳} = ۱۰۲۴$$

اگر ۱۰۲۴ را بر مساحت کف استوانه تقسیم کنیم، ارتفاع آب به‌دست می‌آید.

$$\text{مساحت کف}: \pi r^{۲} = ۳ \times ۴^{۲} = ۴۸$$

$$\frac{۱۰۲۴}{۴۸} \simeq ۲۱$$

**۵۹** گزینه ۲

$$\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h = \frac{۱}{\cancel{۳}_{۱}} \times \cancel{۳}^{۱} \times (۳)^{۲} \times ۹ = ۸۱\,cm^{۳}$$

$$\text{حجم آب جابه‌جاشده} = ۶ \times ۸۱ = ۴۸۶\,cm^{۳}$$

حال کافی است این حجم آب را بر مساحت قاعدهٔ مکعب تقسیم کنیم تا ارتفاع آب در مکعب به دست آید.

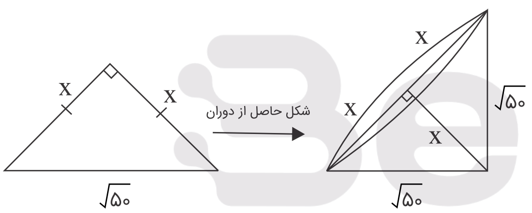
$$\text{مساحت قاعدهٔ مکعب} = ۹ \times ۹ = ۸۱\,cm^{۲}$$

$$\Rightarrow \text{ارتفاع آب} = ۴۸۶ \div ۸۱ = ۶\,cm$$

**۶۰** گزینه ۲

$$\text{حجم مخروط}: \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h \xrightarrow[h=۳]{r=۴} \frac{۱}{۳}\pi \times ۴^{۲} \times ۳ = ۱۶\pi$$

**۶۱** گزینه ۱




$$\Rightarrow x^{۲} + x^{۲} = (\sqrt{۵۰})^{۲} \Rightarrow ۲x^{۲} = ۵۰$$

$$\Rightarrow x^{۲} = ۲۵ \Rightarrow x = ۵\,cm$$

درنتیجه شعاع قاعدهٔ مخروط و ارتفاع مخروط برابر ۵ سانتی‌متر است، پس حجم مخروط برابر است با:

$$\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h = \frac{۱}{۳}\pi(۵)^{۲} \times ۵ = \frac{۱۲۵}{۳}\pi$$

**۶۲**

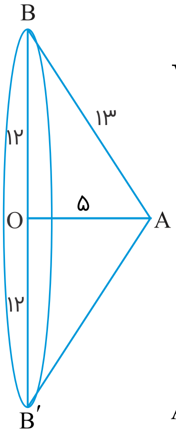
گزینه ۴

ابتدا با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ $OA$ را به دست می‌آوریم:

$$OA^۲ = AB^۲ - OB^۲ = (۱۳)^۲ - (۱۲)^۲ = ۱۶۹ - ۱۴۴ = ۲۵ \Rightarrow OA = ۵$$

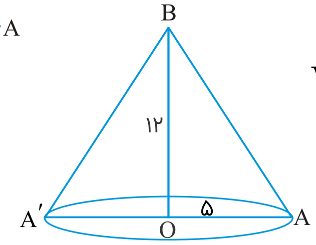
حالت اول: مثلث $OAB$ را حول ضلع $OA$ دوران می‌دهیم، داریم:

پس مخلوط حاصل دارای ارتفاع $OA$ و شعاع قاعدهٔ $OB$ است، پس حجم حاصل از دوران حول ضلع $OA$ برابر است با:




$$V_۱ = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi (OB)^۲ \times OA = \frac{۱}{۳}\pi (۱۲)^۲ \times ۵ = \frac{۷۲۰}{۳}\pi = ۲۴۰\pi$$

حالت دوم:




$$V_۲ = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi (OA)^۲ (OB) = \frac{۱}{۳}\pi (۵)^۲ \times ۱۲$$
$$= \frac{۳۰۰}{۳}\pi = ۱۰۰\pi$$
$$\Rightarrow V_۱ - V_۲ = ۲۴۰\pi - ۱۰۰\pi = ۱۴۰\pi$$

**۶۳**

گزینه ۱

حجم شکل حاصل، فاصلهٔ بین دو مخروط است. مخروط بزرگتر با ارتفاع $AH$ و شعاع قاعدهٔ $HB$ و مخروط کوچکتر با ارتفاع $CH$ و شعاع قاعدهٔ $HD$.

$$HD^۲ + ۳^۲ = ۶^۲ \Rightarrow ۳۶ - ۹ = HD^۲ \Rightarrow HD^۲ = ۲۷ \Rightarrow HD = \sqrt{۲۷} = ۳\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow HB = HD + DB = ۳\sqrt{۳} + ۹ - ۳\sqrt{۳} = ۹$$

$$V_{\text{هرم}} = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h$$

$$V_{\text{هرم بزرگ}} = \frac{۱}{۳}\pi (۹^۲)۷ = ۱۸۹\pi$$

$$V_{\text{هرم کوچک}} = \frac{۱}{۳}\pi (۳\sqrt{۳})^۲ ۳ = ۲۷\pi$$

$$\Rightarrow V_{\text{شکل}} = ۱۸۹\pi - ۲۷\pi = ۱۶۲\pi$$

**۶۴**

گزینه ۴

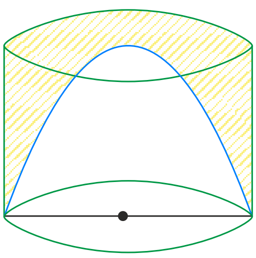
تشکیل نیم‌کره توپر می‌دهد:

$$S_{\text{نیم‌کره توپر}} = ۳\pi r^۲ = ۳\pi \times ۴^۲ = ۴۸\pi$$

**۶۵**

گزینه ۲

بعد از دوران نیمکره‌ای خواهیم داشت درون استوانه.



$$\Rightarrow \text{حجم هاشورخورده} = \text{حجم استوانه} - \text{حجم نیمکره}$$
$$= \pi(۴)^۲ \times ۴ - \frac{۱}{۲} \cdot \frac{۴}{۳}\pi(۴)^۳ = ۶۴\pi - \frac{۱۲۸\pi}{۳} = \frac{۶۴\pi}{۳} \Rightarrow \pi \text{ برابر عدد } \frac{۶۴}{۳}$$

**۶۶** گزینه ۲

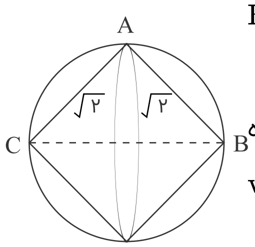
در شکل حاضر نیمکره‌ای داریم که حجم یک مخروط از داخل آن باید کم شود.

$$\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ \times r = \frac{۱}{۳}\pi r^۳$$

$$\text{حجم نیمکره} = \frac{۲}{۳}\pi r^۳$$

$$\text{حجم قسمت بین نیمکره و مخروط} = \frac{۲}{۳}\pi r^۳ - \frac{۱}{۳}\pi r^۳ = \frac{۱}{۳}\pi r^۳ = \frac{۱}{۳}\pi (۴)^۳ = \frac{۶۴}{۳}\pi$$

**۶۷** گزینه ۳




$$BC^۲ = (\sqrt{۲})^۲ + (\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow BC^۲ = ۴ \Rightarrow BC = ۲$$

$$\Rightarrow \text{شعاع کره} : r = \frac{۲}{۲} = ۱ \quad , \quad \text{شعاع قاعدهٔ مخروط} : r = ۱ \quad , \quad h = ۱$$

$$\text{حجم ناحیهٔ هاشورخورده} = \text{حجم کره} - \text{دوبرابر حجم مخروط}$$

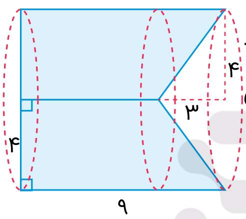
$$v = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ - ۲ \times \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۴}{۳}\pi - \frac{۲}{۳}\pi = \frac{۲}{۳}\pi$$

**۶۸** گزینه ۳

ابتدا کل استوانه را به دست می‌آوریم.

$$\text{حجم استوانه} : \pi r^۲ h = \pi \times ۴^۲ \times ۹ = ۱۴۴\pi$$

پس مخروطی که خالی باشد را محاسبه می‌کنیم:

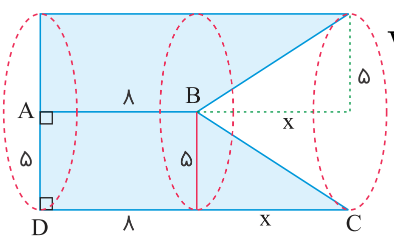



$$\text{حجم مخروط} : \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi \times ۴^۲ \times ۳ = ۱۶\pi$$

$$\text{حجم شکل حاصل} : ۱۴۴\pi - ۱۶\pi = ۱۲۸\pi$$

**۶۹** گزینه ۳

از دوران ذوزنقه حول ضلع $AB$ یک استوانه تشکیل می‌شود که یک مخروط از آن حذف شده است.




$$V_{\text{کل}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} \Rightarrow ۳۰۰\pi = \pi(۵)^۲(۸+x) - \frac{۱}{۳}\pi(۵)^۲ x$$

$$\Rightarrow ۳۰۰\pi = ۲۵\pi(۸+x) - \frac{۲۵}{۳}\pi x \Rightarrow ۳۰۰ = ۲۵(۸+x) - \frac{۲۵}{۳}x$$

$$\Rightarrow ۳۰۰ = ۲۰۰ + ۲۵x - \frac{۲۵}{۳}x \Rightarrow ۱۰۰ = ۲۵x - \frac{۲۵}{۳}x$$

$$\Rightarrow ۳۰۰ = ۷۵x - ۲۵x \Rightarrow ۳۰۰ = ۵۰x \Rightarrow x = ۶$$

$$\Rightarrow CD = ۸ + x = ۸ + ۶ = ۱۴$$

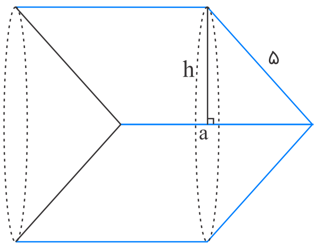
**۷۰** گزینه ۲

حالت اول $V = \pi b^۲ a$

حالت دوم $V = \pi a^۲ b \Rightarrow \frac{\pi b^۲ a}{\pi a^۲ b} = \frac{b}{a}$

**۷۱** گزینه ۲

$S = a.h \Rightarrow ۲۷ = ۹ \times h \Rightarrow h = ۳$




حجم حاصل استوانه‌ای می‌باشد که از پایین به اندازهٔ مخروطی خالی شده و همان مخروط روی استوانه گذاشته شده است. پس حجم حاصل برابر است با:

$V = \pi r^۲ h = \pi \times ۳^۲ \times ۹ = ۸۱\pi$

دقت کنید که شعاع استوانه همان ارتفاع متوازی‌الاضلاع است.

**۷۲** گزینه ۱

ابتدا شکل را به قسمت‌های کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم.